

Ein chaotischer Oszillator mit Röhre, Teil 2: so funktioniert die Periodenverdopplung

Hans Martin Sauer

31. Mai 2020



www.sauerampfer-online.de
Das Physik & Elektronik Archiv

Zusammenfassung – Im zweiten Teil des Artikels zum chaotischen Oszillator, dessen Anfang am 6.2.2020 hier erschienen ist, erörtern wir den Mechanismus der Periodenverdopplung. Im ersten Teil wurde der Röhrenoszillator, dessen Schaltplan Abbildung 1 gezeigt ist, mittels der Kirchhoffschen Regeln analysiert. Das Phänomen der Periodenverdopplungen bis hin zum chaotischen Verhalten wurden dort beschrieben. Außerdem wurde eine nichtlineare Schwingungsgleichung für den Gitterstrom und die -spannung der Pentode abgeleitet. Auf diese Gleichung bauen wir hier auf. Wir wollen verstehen, wie es möglich ist, dass ein solcher Oszillator neben den typischen Oberwellen auch Wellenanteile mit halber Frequenz erzeugt. Den Versuchsaufbau dieses Oszillators, an dem die Gleichung experimentell nachvollzogen wurde, zeigt Abbildung 2.

1 Oberwellen mit halber Grundfrequenz?

Es ist tatsächlich nicht ganz offensichtlich, wie so am Röhrenoszillator Oberwellen (falls man sie so nennen darf) mit der halben, oder sogar mit einem Viertel der Grundfrequenz entstehen. Es ist allgemein bekannt, dass elektrische Oszillatoren und speziell solche mit Röhren neben der Grundfrequenz f_0 auch Oberwellen mit dem ganzzahlig Vielfachen der Grundfrequenz erzeugen – wir beschreiben hier der allgemeinen elektrotechnischen Konvention folgend Schwingungen durch ihre *Kreisfrequenz* $\omega = 2\pi f$, dem 2π -fachen der eigentlichen Frequenz f . Dies liegt an den nichtlinearen elektrischen Eigenschaften

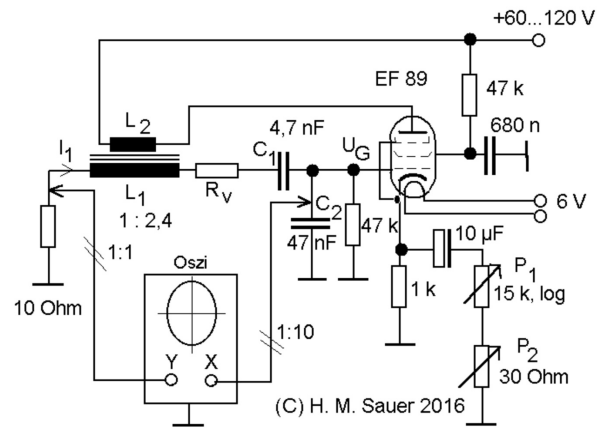


Abbildung 1: Schaltplan des Oszillators

von Röhren und auch von Transistoren. Wenn man mit diesen *aktiven* Bauelementen Schwingungen erzeugen möchten, dann machen sich ihre nichtlinearen elektrischen Eigenschaften spätestens dann bemerkbar, wenn die Schwingungsamplitude groß ist: die Schwingungsform der Spannung, die man beispielsweise am Schwingkreis mißt, weicht von der Gestalt einer Sinusschwingung mit der Resonanzfrequenz ω_g des Schwingkreises ab. Das aktive Bauelement treibt nicht nur die Schwingungsentstehung an, es begrenzt andererseits auch ihre Amplitude nach oben. Unser Röhrenoszillator tut dies vorwiegend durch den Einsatz des Gitterstroms. Mit zunehmender Schwingungsamplitude steigt der Gitterstrom während der positiven Halbwelle stark an. Das Gitter der Röhre entzieht dem Schwingkreis zunehmend Energie. Dadurch erhöht sich einerseits die Dämpfung des Schwingkreises. Andererseits wird die Sinusschwingung zu einer asymmetrischen Welle deformiert.

2 Fourier-Analyse und Frequenzspektrum

Nach dem bekannten Theorem von *Joseph Fourier*, einem französischen Mathematiker, der um die Zeit der französischen Revolution wirkte (und sogar Napoleon Bonaparte im Jahr 1798 auf dessen ägyptischem Feldzug begleitete), lassen sich grundsätzlich alle periodischen Vorgänge,



Abbildung 2: Der Versuchsaufbau mittels Elektronik-Experimentierkasten.

wenn sie von der harmonischen Sinusform abweichen, stets durch eine Überlagerung mit harmonischen Schwingungen höherer Frequenz beschreiben. Die dabei vorkommenden Schwingungen haben Frequenzen, die stets ganzzahlig Vielfache der Grundfrequenz ω_g sind. Jede periodische Spannung $U(t)$ der Grundfrequenz ω_g kann also als Überlagerung von sinusförmigen Teilspannungen $U_n(t) = a_n e^{i\omega_n t}$ angesehen werden, wobei $a_n = a'_n + ia''_n$ die komplexwertige Amplitude der n -ten Harmonischen mit der Frequenz $\omega_n = n\omega_g$ ist. a'_n und a''_n bezeichnet man als Real- und Imaginärteil. Der Index $n = 1, 2, 3 \dots$ durchläuft alle positiven ganzen Zahlen.

$$U(t) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\omega_g t} \quad (1)$$

Die Koeffizienten a_n berechnen sich umgekehrt zu

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} U(t) e^{-in\omega_g t} dt \quad (2)$$

mit $T_0 = 2\pi/\omega_g$ als Periodenzeit der Schwingung. Die Beträge der Amplituden a_n machen das Frequenzspektrum der Schwingungen aus. Im FFT-Modus eines Digitaloszilloskops lässt es sich unmittelbar darstellen. Das Oszilloskop zeigt eine Folge von entsprechend hohen „Peaks“ auf seinem Schirm, im konstanten Abstand der Grundfrequenz $f_g = \omega_g/2\pi$, siehe Abbildung 3.

3 So reagiert der Oszillatorschwingkreis auf „Fremdfrequenzen“

Soviel als knappe Zusammenfassung des Lehrbuchwissens der Elektronik, das wir hier nicht weiter vertiefen. Wir vermerken, dass hier allerdings keine *halbzahligen* Vielfachen von ω_g vorkommen, also etwa die Frequenz $\omega_g/2$, oder zum Beispiel $3\omega_g/2$. Sie sind nicht Bestandteil des Spektrums eines periodischen Oszillators mit Grundfrequenz ω_g , obgleich diese im schon erwähnten ersten Teil dieses Berichts auf den dort abfotografierten Oszillogrammen klar zu sehen waren. Wir haben hier also zu klären, wie solche Frequenzen entstehen. Man spricht hier von *Periodenverdopplung*, doch wäre *Frequenzhalbierung* sicherlich ein ebenso treffender Begriff.

Um dies zu verstehen, betrachten wir die beiden Gleichungen für U_G und I_L für Gitterspannung und Schwingkreisstrom, Nummer (20) und (21) aus dem ersten Teil. Diese bilden ein gekoppeltes Gleichungssystem, wobei die Koeffizienten ε und β die Dämpfung sowie die nichtlineare Einkopplung im Schwingkreis des Röhrenoszillators angeben:

$$\frac{1}{R_Z} \frac{dU_G}{d\tau} = \frac{d^2 I_L}{d\tau^2} + (\varepsilon - \beta (U_G - \tilde{U}_G)) \frac{dI_L}{d\tau} + I_L \quad (3)$$

und

$$\frac{1}{R_Z} \left(\frac{dU_G}{d\tau} + \frac{U_G}{T_g} \right) + \frac{C_1}{C_2} I_0 e^{\frac{U_G}{U_{\text{eff}}^{(\text{th.})}}} = \frac{C_1}{C_2} I_L \quad (4)$$

R_Z ist die Schwingkreisimpedanz. Die effektive thermische Anlaufspannung der Röhre ist $U_{\text{eff}}^{(\text{th.})}$, und I_0 ist der Gitterstrom, der sich aufgrund der Anlaufspannung zwischen Steuergitter und Kathode im Kurzschlussfall einstellt. \tilde{U}_G gibt die Gittervorspannung am Arbeitspunkt der Röhre an. C_1/C_2 ist das Teilverhältnis des kapazitiven Spannungsteilers vor dem Röhrengitter. T_g ist die Zeitkonstante der Entladung des Kondensators C_2 über den Gitter-Ableitwiderstand. Die Resonanzkreisfrequenz ω_g im schwach rückge-

koppleten Fall, wo der Oszillator eben zu schwingen beginnt, haben wir auf Eins normiert. Als Zeitachse haben wir die dimensionslose Variable $\tau = \omega_g t$ eingeführt.

Wir betrachten nun Gleichung (3) für eine einfache harmonische Schwingung der Frequenz ω und setzen $U_G(\tau) = U_n e^{i\omega\tau}$ sowie $I_L(\tau) = I_n e^{i\omega\tau - i\phi_n}$. Hierbei sind U_n und I_n die reellwertigen Amplituden von Spannung und Strom. ϕ_n ist die Phasenverschiebung des Stroms gegenüber der Spannung. Einsetzen ergibt

$$\frac{1}{R_Z} \frac{dU_G}{d\tau} = \left[-\omega^2 + i\omega(\varepsilon + \beta\tilde{U}_G) + 1 \right] I_L - i\omega\beta U_G I_L \quad (5)$$

Dies ist die Gleichung für den Stromverlauf $I_L(\tau)$ einer erzwungenen Schwingung an einem Schwingkreis mit der Eigenfrequenz $\omega_g = 1$ und der Dämpfung $\varepsilon + \beta\tilde{U}_G$. Der letzte Term auf der rechten Seite ist zum Produkt $U_G I_L$ proportional und oszilliert in der Zeit gemäß $e^{2i\omega\tau}$, also mit der doppelten Erregerfrequenz. Es generiert einen Beitrag zu den Oberwellen der Frequenz 2ω . Dies ist im oberen Spektrum in Abbildung 3 zu sehen. Solche Oberwellen können wir hier zunächst aus der Betrachtung ausschließen. Vielmehr untersuchen wir die Phasenbeziehung zwischen I_L und U_G . Dazu nehmen wir an, dass die Dämpfung $\varepsilon + \beta\tilde{U}_G \ll \omega_g$ recht klein sei. Die Phasenbeziehung folgt dem üblichen Bild einer erzwungenen Schwingung. Wenn die Schwingungsfrequenz ω kleiner ist als die Eigenfrequenz $\omega_g = 1$, dann ist der Strom I_L mit $dU_G/d\tau$ phasengleich. Der Strom eilt der Spannung um nahezu $\phi_n = -90^\circ$ voraus. Wenn dagegen $\omega > \omega_g$ ist, dann eilt der Strom der Spannung und $\phi_n = +90^\circ$ nach. Wenn man also die Frequenz ω langsam über den Schwellwert ω_g erhöht, dann macht der Strom relativ zur Spannung einen Phasensprung von 180° . Nur im Resonanzfall, wenn $\omega = \omega_g$ ist, sind Strom und Spannung gleichphasig. Dieser Phasensprung verläuft als Funktion von ω natürlich nicht diskontinuierlich. Er vollzieht sich stetig in einem schmalen Frequenzbereich in der Umgebung von ω_g . Dieser Bereich ist um so schmaler, je kleiner die Dämpfung des Schwingkreises ist. Wir vermerken hier, dass

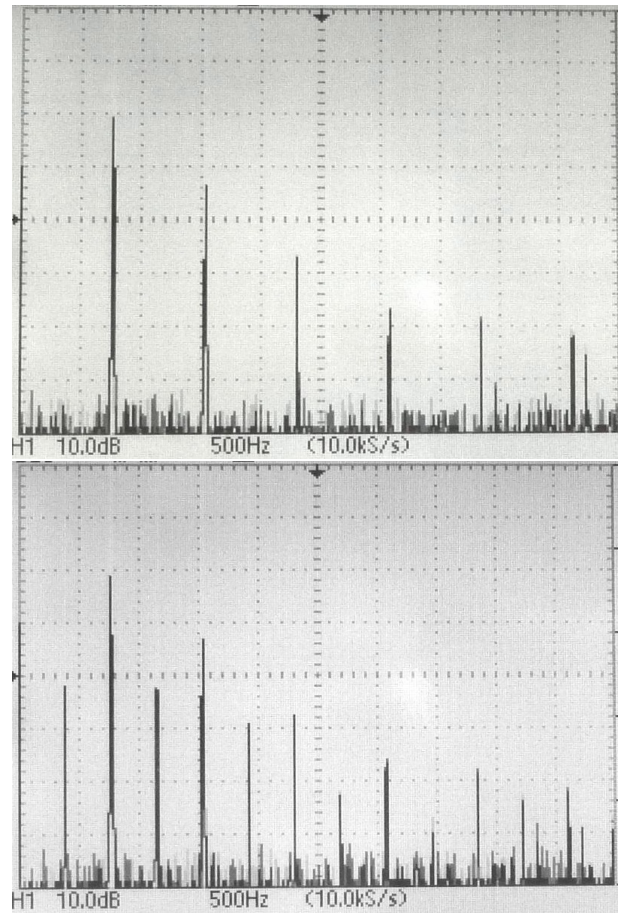


Abbildung 3: Oben: Spektrum mit Grundfrequenz und Oberwellen im regulären Betrieb. Unten: bei der Periodenverdopplung erscheinen im Spektrum halbzahlige Vielfache der Grundfrequenz.

die Phasenverschiebung ϕ_n als Funktion der Frequenz für das Verständnis der Periodenverdopplung bei der halben Schwingkreisfrequenz $\omega_g/2$ von entscheidender Bedeutung ist. Hier nämlich eilt der Strom der Spannung um nahezu -90° voraus.

4 Wie halbe Frequenzen verstärkt werden

Wir regen den Schwingkreis bei der Resonanzfrequenz ω_g an. Zusätzlich berechnen wir die Amplitude $I_h(\tau)$ der Schwingung mit der halben Frequenz $\omega_g/2$. Diese Amplitude mag sich im

Verlauf vieler Schwingungsperioden allmählich ändern. Wir setzen also $I_L(\tau) = I_n e^{i\omega_g \tau - i\phi_h} + I_h(\tau) e^{\frac{i\omega_g}{2}\tau - i\phi_h}$, wobei ϕ_h die Phase des Stroms ist. Unser Augenmerk gilt dabei den nichtlinearen Termen der Gleichung. Wir vermerken hierzu, dass Spannungen und Ströme natürlich reell und nicht komplex sind. Das heißt, wir messen immer nur den Realteil einer komplexen Welle $e^{i\omega\tau}$, also die Überlagerung $\frac{1}{2}(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau})$. Dadurch liegt die gleiche Welle mit identischer Amplitude immer auch mit *negativer* Frequenz $-\omega$ vor. Das gilt auch für die Anregung mit halber Resonanzfrequenz, die wir hier untersuchen. Dies hat zur Konsequenz, dass in dem Produkt $U_G I_L$ aus Gleichung (5) ein Beitrag $\frac{1}{2}U_n e^{i\omega_g \tau} I_h e^{-\frac{i\omega_g}{2}\tau + i\phi_h} = \frac{1}{2}U_n I_h e^{\frac{i\omega_g}{2}\tau + i\phi_h}$ auftritt. Das ist eine Schwingungskomponente der Frequenz $\omega_g/2$, deren Amplitude gleich $\frac{1}{2}U_n I_h(\tau)$ ist. Wir vermerken, dass diese Koinzidenz der Schwebungsfrequenz aus den beiden sich überlagernden Frequenzanteilen ω_g mit $\omega_g/2$ mit den Frequenzen selbst für keine andere Kombination als die eigentliche und die halbe Resonanzfrequenz des Schwingkreises möglich ist.

Wir setzen dies alles wieder in Gleichung (3) ein, wobei aber allein die Schwingungsanteile mit der Frequenz $\omega_g/2$ betrachtet werden. Die allgemeine Phase $e^{\frac{i\omega_g}{2}\tau - i\phi_h}$ dividieren wir heraus.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I_h}{d\tau^2} + \left[-\frac{\omega_g^2}{4} + \frac{i\omega_g}{2} (\varepsilon + \beta \tilde{U}_G) + 1 \right] I_h \\ = - \left(i\omega_g + \frac{\varepsilon + \beta \tilde{U}_G}{2} \right) \frac{dI_h}{d\tau} \\ + \frac{i\omega_g \beta}{4} U_n I_h e^{2i\phi_h} \end{aligned} \quad (6)$$

Diese Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der Wellenamplitude bei halber Grundfrequenz.

5 Die Bedeutung der Nichtlinearität

Wir diskutieren nun die Frage, unter welchen Bedingungen der Strom $I_h(\tau)$ von halber Eigenfrequenz in der Zeit anwächst und machen den An-

satz $I_h(\tau) = A e^{\gamma_h \tau}$. Hierbei ist A die Amplitude zum Zeitpunkt $\tau = 0$ und γ_h (mit $|\gamma_h| \ll \omega_g$) der rein *reelle* Wachstumsparameter. Falls Lösungen mit $\gamma_h > 0$ existieren, dann kann $I_h(\tau)$ auch bei einer sehr geringen Anfangsamplitude A in der Zeit stark anwachsen. Wir ersetzen ω_g zudem überall explizit durch 1. Einsetzen in Gleichung (6) ergibt

$$\gamma_h^2 + i\gamma_h + \frac{3}{4} - \frac{i}{4}\beta U_n e^{2i\phi_h} + \frac{i}{2}(\varepsilon + \beta \tilde{U}_G) = 0 \quad (7)$$

Man beachte, dass der letzte Term auf der linken Seite dieser Gleichung nach unseren Voraussetzungen verhältnismäßig klein ist gegen dem Term $1 - \frac{\omega_g^2}{4} = \frac{3}{4}$, der diesen Wert aufgrund der Phasenlage im Schwingkreis unterhalb der Resonanz bei ω_g hat. Betrachtet man die übrigen Terme und nimmt weiter an, dass der Beitrag βU_n ebenfalls sehr klein ist, dann reduziert sich die Bedingung für γ_h auf $\gamma_h^2 + i\gamma_h + \frac{3}{4} = 0$. Diese quadratische Gleichung für γ_h hat aber überhaupt keine reelle Lösung, und ein komplexes γ_h erfüllt die oben gestellte Bedingung nicht. Die einzig mögliche Lösung von Gl. (6) ist also jene, bei der die Amplitude A beziehungsweise $I_h(\tau)$ der Schwingung mit halber Resonanzfrequenz $\omega_g/2$ Null ist.

Die Lage ändert sich jedoch, wenn wir annehmen, der nichtlineare Term sei von erheblicher Größe. Eine rein reelle, positive Lösung für γ_h ergibt sich, wenn wir diesen Term nach Betrag und Phase anpassen. Gleichung (7) lautet ¹ in dieser Darstellung

$$\left\{ \left(\gamma_h^2 + \frac{3}{4} \right)^2 + \gamma_h^2 \right\}^{1/2} e^{i\delta_h} = \frac{1}{4} \beta U_n e^{i(2\phi_h + \pi/2)} \quad (8)$$

mit der Phase $\tan \delta_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_h^2 + \frac{3}{4}}$. Dies funktioniert allerdings nur dann, wenn

$$\beta U_n > 3 \quad (9)$$

weil der Betrag der linken Seite dieser Gleichung

¹Hinweis: Die vollständige Amplitudengleichung ist

$$\left\{ \left(\gamma_h^2 + \frac{3}{4} \right)^2 + \gamma_h^2 \left(1 - \frac{\beta}{2} U_n \cos \delta_h \right)^2 \right\}^{1/2} = \frac{1}{4} \beta U_n$$

Doch lassen sich die weiteren Terme mit βU_n an dieser Stelle immer als geringfügig abschätzen, selbst wenn $\beta U_n \gg 1$ ist.

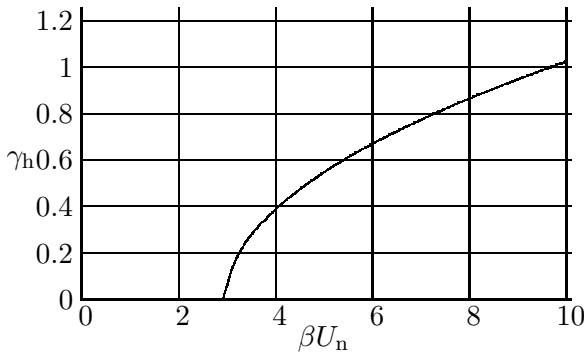


Abbildung 4: Die anfängliche Wachstumsrate γ_h der Amplitude des Schwingungsanteils mit der halben Resonanzfrequenz als Funktion der nichtlinearen Kopplung βU_n .

selbst im Grenzfall, dass γ_h nahe Null ist, keinen Wert unter $\frac{3}{4}$ annehmen kann. Ziehen wir aus dem ersten Teil des Berichts die dortige Gleichung (19) mit der genauen Definition des Parameters β hier hinzu, dann lautet die Bedingung für die Periodenverdopplung

$$k \gamma L_1 S_{\text{eff}} U_h > 3 C_2 R_Z \quad (10)$$

Eine genaue Analyse von Gleichung (8) ergibt, dass die Wachstumsrate der Amplitude im Grenzfall $|\gamma_h| \ll 1$ durch

$$\gamma_h = \begin{cases} 0 & ; \beta U_n \leq 3 \\ \sqrt{\frac{3}{20}(\beta U_n - 3)} & ; \beta U_n > 3 \end{cases} \quad (11)$$

gegeben ist. Dies ist in Abbildung 4 dargestellt. Die Phasenverschiebung ϕ_h ergibt sich schließlich zu

$$\phi_h = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \frac{\gamma_h}{\gamma_h^2 + \frac{3}{4}} \quad (12)$$

und liegt für kleine Werte von γ_h knapp oberhalb von -45° . Übrigens ist auch eine Lösung mit negativem reellen γ_h möglich. Diese entspricht einer gedämpften Welle. Jedoch ist die Phasenverschiebung etwas anders. Sie liegt hierfür ein wenig unterhalb von -45° . Ein positives γ_h zeigt ein Wachstum der Welle mit halber Resonanzfrequenz an. Die Wachstumsrate ist im Vergleich zur Schwingungsperiode $\omega_g/2$ sehr gering, wenn βU_n die Ungleichung in (9) nur knapp erfüllt. Verfehlt sie die Ungleichung dagegen, und sei es nur ganz geringfügig, dann muss die Amplitude A unseres Ansatzes Null sein.

6 Fazit

Zusammenfassend können wir feststellen, dass in unserem Röhrenoszillator eine Periodenverdopplung stattfindet, wenn die Amplitude U_n der Grundschwingung und die nichtlineare Einkopplung β des Oszillators eine gewisse Schwelle überschreiten. Bei hinreichend kleiner Schwingungsamplitude arbeitet der Oszillator dagegen im regulär-periodischen Betrieb. Die Entstehung von harmonischen Oberwellen ist im Gegensatz zu den Periodenverdopplungen nicht an eine solche kritische Schwelle gebunden. Oberwellen nehmen einfach stetig mit steigender Oszillatoramplitude an Intensität zu.

Ist nun erst einmal eine Periodenverdopplung eingetreten, dann lässt sich die hier gezeigte Analyse mit geänderten Rollen unter den Frequenzen wiederholen. Bei der zweiten Periodenverdopplung überlagern sich die Wellen der halben Grundfrequenz mit solchen von einer Frequenz, die dem Viertel der Grundfrequenz entspricht, oder auch einem Dreiviertel. Hierdurch beginnt eine Kaskade, die sich durch weitere Heraussetzung der nichtlinearen Einkopplung β beliebig fortsetzt und schließlich zur Entstehung eines Frequenzkontinuums führt. Die Schwingungen des Oszillators sind dann nicht mehr periodisch und vorhersagbar, sondern eben *chaotisch*.

Das vorliegende Werk ist urheberrechtlich geschützt. Kopieren und Weiterverbreiten ist unter den Bedingungen der Creative Commons Lizenz CC BY-NC-SA 4.0 gestattet.

Dr. Hans Martin Sauer, TU Darmstadt,
Magdalenenstraße 2, 64289 Darmstadt

E-Mail: bastelseiten@t-online.de

Link zur Originaldatei:

<http://www.sauerampfer-online.de/e-reports/Periodenverdopplung.pdf>

Redaktionsdatum: 26. Januar 2021

Das Video zum chaotischen Oszillator:

<https://www.youtube.com>

[/watch?v=nDZwk4ntCXQ](https://www.youtube.com/watch?v=nDZwk4ntCXQ)

Meine Homepage: www.sauerampfer-online.de