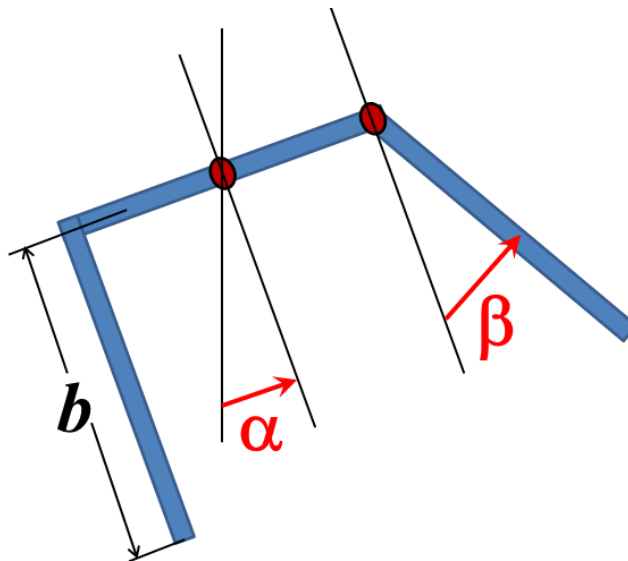


# Das Rottsche Pendel <sup>1</sup>

Hans Martin Sauer

**Zusammenfassung:** Die Bewegungsgleichungen eines zweigliedrigen *Rottschen Pendels* <sup>2</sup> werden mittels der Lagrangeschen Mechanik hergeleitet. Das Ergebnis ist ein System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung, die beispielsweise im Runge-Kutta-Verfahren numerisch integriert werden können.



## 1 Der Aufbau des Pendels

Das Rottsche Pendel besteht aus zwei gekoppelten, unabhängig beweglichen Hebelarmen, sowie zwei Drehlagern, die jeweils um  $360^\circ$  frei beweglich sind. Das Pendel ist, abgesehen von der festen Aufhängung des ersten, zentralen Lagers, aus drei Stäben zusammengefügt, die jeweils dieselbe Länge  $b$  und die Masse  $m$  haben.

Der sogenannte *zentrale Stab* ist in seiner Mitte am *zentralen Lager* ange-

---

<sup>1</sup>Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die Nutzung ist im Rahmen der *Creative Commons Lizenz CC BY-NC-SA 4.0* erlaubt. Jede kommerzielle Nutzung ist verboten. Die bibliographischen Daten befinden sich auf der letzten Seite dieses Dokuments.

<sup>2</sup>N. Rott, Z. Angew. Math. Phys. **21** (4) 570-582 (1970)

bracht. Seine beiden Halbarme können sich wie die Blätter eines Propellers frei um eine horizontale Achse drehen. Den Drehwinkel bezeichnen wir mit  $\alpha$ .

An einem Ende des zentralen Stabs ist ein Ende des *feste Seitenstabes* angebracht. Er bildet mit dem zentralen Stab einen rechten Winkel und ist so ausgerichtet, dass er in der Ebene der Drehung liegt. Die beiden Stäbe bilden also ein starres Knie.

Am gegenüberliegenden Ende des zentralen Stabes ist über ein weiteres, das *seitliche Lager*, der dritte, *bewegliche Seitenstab* angebracht. Die Drehachsen des zentralen und des seitlichen Lagers sind horizontal und zueinander parallel. Der bewegliche Seitenstab bildet mit dem zentralen Stab daher ebenfalls ein Knie, das jedoch im Unterschied zu vorigen in seinem Gelenk um volle Umdrehungen beweglich ist. Den Drehwinkel zwischen dem zentralen und dem beweglichen Seitenstab bezeichnen wir mit  $\beta$ .

Im Ruhezustand und unter der Wirkung des Gewichts der Stäbe zeigen die beiden Seitenstäbe parallel nach unten, während der zentrale Stab eine horizontale Stellung einnimmt. Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  definieren wir in diesem Zustand als Null.

## 2 Die kinetische Energie des Pendels

Die kinetische Energie des Pendels berechnet sich als Summe der betreffenden Energien der drei Stäbe. Für den festen Seitenstab und den zentralen Stab kann die kinetische Energie aus Beiträgen zum Massenträgheitsmoment  $\Theta_{1+2}$  bestimmt werden, das sich für die Drehung um das zentrale Lager mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\alpha}$  ergibt. Beim beweglichen Seitenstab ist das etwas schwieriger, weil die Drehung um das seitliche Lager in einem rotierenden Bezugssystem durchgeführt werden muss. Diesen Fall betrachten wir im zweiten Schritt.  $\Theta_{1+2}$  ergibt sich durch Integration wie folgt:

$$\Theta_{1+2} = \frac{m}{b} \left[ \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx + \int_0^b \left\{ \frac{b^2}{4} + y^2 \right\} dy \right] = \frac{2}{3} m b^2 \quad (1)$$

wobei  $m/b$  (in kg/m) die Massendichte der Stäbe pro Länge ist. Die kinetische Energie ist

$$T_{1+2} = \frac{1}{2} \Theta_{1+2} \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{3} m b^2 \dot{\alpha}^2 \quad (2)$$

Der Beitrag des beweglichen Seitenstabes berechnen wir direkt durch Aufintegration seiner Massenelemente, die sich mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\alpha}$  und  $\dot{\beta}$  um das zentrale bzw. das seitliche Lager drehen. Die Geschwindigkeit  $\vec{v}(x)$  des Massenelements an der Position  $x \in [0, b]$  des Seitenstabes, gemessen

vom seitlichen Lager aus, ergibt sich als die Summe der beiden Geschwindigkeitsbeiträge der massenelemente um die beiden Lager:

$$\vec{n} \times \vec{v}(x) = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2(x)) \dot{\alpha} + \vec{r}_2(x) \dot{\beta} \quad (3)$$

Hierbei sind  $\vec{n}$  der Einheitsvektor entlang der beiden Drehachsen,  $\vec{r}_1$  der Abstandsvektor zwischen dem zentralen und dem seitlichen Lager (vom Betrag  $b/2$ ) und  $\vec{r}_2(x)$  der Abstandsvektor zwischen dem seitlichen Lager und dem betreffenden Massenelement auf dem beweglichen Seitenstab (d.h. er ist vom Betrag  $x$ ). Die beiden Vektoren schließen einen Winkel  $\pi/2 + \beta$  ein. Nun ist, da  $\vec{v}$  und  $\vec{n}$  stets senkrecht zueinander orientiert sind, das Betragsquadrat der Geschwindigkeit gleich

$$\begin{aligned} |\vec{v}(x)|^2 &= |\vec{n} \times \vec{v}(x)|^2 & (4) \\ &= \dot{\alpha}^2 [\vec{r}_1 + \vec{r}_2(x)]^2 + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} [\vec{r}_1 + \vec{r}_2(x)] \cdot \vec{r}_2(x) + \dot{\beta}^2 |\vec{r}_2(x)|^2 \\ &= \dot{\alpha}^2 [r_1^2 + 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + r_2^2] + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} [\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + r_2^2] \\ &\quad + \dot{\beta}^2 |\vec{r}_2(x)|^2 \\ &= \dot{\alpha}^2 \left[ \frac{b^2}{4} + b x \sin \beta \right] + \dot{\alpha} \dot{\beta} b x \sin \beta + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 x^2 \end{aligned}$$

Somit berechnet sich die kinetische Energie des dritten Seitenstabes zu

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{m}{2b} \int_0^b |\vec{v}(x)|^2 dx & (5) \\ &= m b^2 \left[ \dot{\alpha}^2 \left\{ \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \sin \beta \right\} + \dot{\alpha} \dot{\beta} \frac{1}{4} \sin \beta + \frac{1}{6} (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \right] \end{aligned}$$

Der Gesamtwert der kinetischen Energie beträgt daher mit den Beiträgen der beiden anderen Stäbe

$$T = m b^2 \left[ \dot{\alpha}^2 \left\{ \frac{11}{24} + \frac{1}{4} \sin \beta \right\} + \dot{\alpha} \dot{\beta} \frac{1}{4} \sin \beta + \frac{1}{6} (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \right] \quad (6)$$

### 3 Potentielle Energie

Für die potentielle Energie im Schwerfeld (Schwerebeschleunigung  $g$ ) sind allein die beiden Seitenstäbe relevant, da der zentrale Stab in seinem Schwerpunkt gelagert ist. Der Schwerpunkt des festen Seitenstabes liegt dagegen im Abstand  $b\sqrt{2}$  vom zentralen Lager, wobei die Verbindungsachse gegen die Vertikale einen Winkel von  $-\pi/4 + \alpha$  einnimmt (Winkel messen wir

im Gegenuhrzeigersinn. Ein negativer Winkel bedeutet, dass die Verbindungsachse im Uhrzeigersinn gegen die Vertikale gedreht ist). Somit ist die potentielle Energie des festen Seitenstabes gleich

$$V_2 = -\frac{mgb}{\sqrt{2}} \cos(\pi/4 - \alpha) \quad (7)$$

Der Abstand des Schwerpunktes des beweglichen Seitenstabes zum zentralen Lager berechnet sich etwas anders. Die obere Hälfte dieses Seitenstabes, sowie die ihm zugewandte Hälfte des zentralen Stabes (also die Verbindungsachse von zentralem zum seitlichen Lager) bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit den Kathetenlängen  $b/2$ , die in einem Winkel  $\pi/2 + \beta$  aneinander stoßen. Die beiden verbleibenden Winkel zwischen den Katheten und der Hypotenuse, der Verbindungsachse des Schwerpunkts zum zentralen Lager, ist somit gleich  $\gamma = \pi/4 - \beta/2$ . Die Länge der Verbindungsachse ist (nach dem Kosinussatz) gleich  $L_3 = b\sqrt{\frac{1+\sin\beta}{2}} = b \cos(\pi/4 - \beta/2)$ . Die Neigung der Verbindungsachse gegen die Vertikale ist gleich  $\alpha' = \alpha + \pi/2 - \gamma = \pi/4 + \alpha + \beta/2$ .

Die potentielle Energie des beweglichen Seitenstabes ist somit gleich

$$V_3 = -mgb \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\beta}{2}\right) \quad (8)$$

Die vollständige *Lagrange-Funktion* des Rottschen Pendels ist also

$$\begin{aligned} L &= T - V_2 - V_3 \\ &= \frac{m b^2}{2} \left( \frac{11}{12} + \frac{1}{2} \sin \beta \right) |\dot{\alpha}|^2 + \frac{m b^2}{4} \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + \frac{m b^2}{6} |\dot{\alpha} + \dot{\beta}|^2 \\ &\quad + m g b \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\beta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

wobei die Identität  $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$  genutzt wurde.

## 4 Lagrange-Bewegungsgleichungen

Die *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen* lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \quad (11)$$

Es ist zweckmäßig, diese Gleichungen in ein System einfacher Differentialgleichungen umzuformen. Hierzu definieren wir die *kanonischen Drehimpulse*

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \\ &= m b^2 \left( \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \sin \beta \right) \dot{\alpha} + m b^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \sin \beta \right) \dot{\beta} \end{aligned} \quad (12)$$

$$J_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = m b^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \sin \beta \right) \dot{\alpha} + \frac{m b^2}{3} \dot{\beta} \quad (13)$$

sowie die darauf wirkenden Drehmomente

$$\begin{aligned} M_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= m g b \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right. \\ &\quad \left. - \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} M_\beta = \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{m b^2}{4} \left( \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha} \dot{\beta} \right) \cos \beta \\ &\quad + \frac{m g b}{2} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \right] \\ &= \frac{m b^2}{4} \left( \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha} \dot{\beta} \right) \cos \beta - \frac{m g b}{2} \sin(\alpha + \beta) \end{aligned} \quad (15)$$

Mit den Identitäten

$$\dot{J}_\alpha = M_\alpha \quad (16)$$

$$\dot{J}_\beta = M_\beta \quad (17)$$

sind die Bewegungsgleichungen in Form von Differentialgleichungen zweiter Ordnung vollständig gegeben.

Die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\alpha}$  und  $\dot{\beta}$  lassen sich mit (12) und (13) durch die kanonischen Drehimpulse darstellen wie folgt:

$$\dot{\alpha} = \frac{J_\alpha - J_\beta \left( 1 + \frac{3}{4} \sin \beta \right)}{m b^2 \left( \frac{4}{3} - \frac{3}{16} \sin^2 \beta \right)} \quad (18)$$

$$\dot{\beta} = \frac{J_\beta \left( \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \sin \beta \right) - J_\alpha \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \sin \beta \right)}{m b^2 \left( \frac{4}{3} - \frac{3}{16} \sin^2 \beta \right)} \quad (19)$$

Autor und Inhaber der Urheberrechte:

Dr. rer. nat. Hans Martin Sauer  
Technische Universität Darmstadt  
Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren  
Magdalenenstraße 2  
64289 Darmstadt  
E-Mail: sauer@idd.tu-darmstadt.de und bastelseiten@t-online.de

Titel:

Das Rottsche Pendel

Link zur Originaldatei:

[http://www.sauerampfer-online.de/e\\_reports/Rottpendel\\_Sauer2018.pdf](http://www.sauerampfer-online.de/e_reports/Rottpendel_Sauer2018.pdf)

Erscheinungsort und Redaktionsdatum der vorliegenden Fassung:

Darmstadt, 26. Oktober 2018