L-Culator - Magnetische Aktoren und Wegaufnehmer

Dr. rer. nat. Hans Martin Sauer

Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren

TU Darmstadt

D-64289 Darmstadt

— letzte Änderung: 4. August 2014 —

Zusammenfassung

Der vorliegende Bericht dokumentiert die Berechnungsmethoden für elektromagnetisch-mechanische Energiewandler und Bewegungsaufnehmer auf der Grundlage des Biot-Savart-Gesetzes. Zentrale Bedeutung haben hierbei die sogenannten Wandlerparameter, die das Verhältnis zwischen den elektrischen und den mechanischen Stellgrößen beschreiben. Die praktische Durchführungen solcher Berechnungen ist ab der Version 0.43 mit dem Software-Paket *L-Culator* enthalten. Mit diesem Rechenblatt können die Wandlerparameter als Funktion der Geometriedaten des Elektromagneten und des Permanentmagneten, aus denen ein solcher Wandler besteht, bestimmt werden.

1 Energiewandler: magnetische vs. piezoelektrische Systeme

Eine einfache Umsetzung von elektrischer in mechanische Energie und umgekehrt sind mit magnetischen und piezoelektrischen Energiewandlern verschiedenster Bauformen möglich. Man spricht hierbei jeweils von einem magnetischen oder piezoelektrischen Wegaufnehmer, wenn Kräfte und Bewegung, bzw. mechanische Energie in elektrische Spannung und in Strom umgesetzt wird, bzw. von einem Aktor, wenn elektrische Energie in eine mechanische Kraft umgewandelt wird.

Beim magnetischen Wandler übt beispielsweise ein Elektromagnet, der auf einer festen Auflage montiert ist, eine Kraft auf einen Permanentmagneten aus, der an einem bestimmten Punkt des zu bewegenden Hebels befestigt ist. Umgekehrt induziert dieser Magnet in der Wicklung des Elektromagneten eine Spannung, die mit der Phasenlage der mechanischen Schwingungen in einer festen Beziehung steht.

Beim piezoelektrischen System ist der zu bewegende Hebel an einer bestimmten Stelle auf einem piezoelektrischen Bauelement befestigt. Dies ist zum Beispiel ein Quarzkristall oder ein ferroelektrischer Keramikkörper, der seinerseits auf einer festen Unterlage ruht. Der Quarz bzw. Keramikkörper ist auf zwei Seiten mit metallischen Elektroden beschichtet. Legt man hier nun eine elektrische Spannung an, dann tritt im Quarz eine Deformation ein, die sich auf den Hebel überträgt. Umgekehrt ensteht an den Kontaktflächen des Quarzes eine elektrische Spannung, wenn eine Kraft auf die Auflagefläche ausgeübt wird, z.B. wenn der Hebel gegenüber der Ruheposition ausgelenkt wird.

Magnetische Energiewandler haben gegenüber piezoelektrischen Wandlern den Vorteil, daß die realisierbaren Auslenkungen verhältnismäßig groß sind. Zudem kann erreicht werden, daß der Permanentmagnet bei stromlosem Elektromagneten völlig kräftefrei ist. Die durch den Energiewandler bedingte mechanische Dämpfung ist also gering. Außerdem ist bei magnetischen Wandlern günstig, daß sie, sofern sie im Ruhezustand kräftefrei sind, am Hebel leicht montiert und wieder abgenommen werden können, ohne daß dessen Lagerung verändert werden muß. Nachteilig ist allerdings, daß die Ausübung einer statischen Kraft eine beständige Zufuhr elektrischer Leistung an den Elektromagneten erfordert, während dies beim piezoelektrischen Wandler nicht der Fall ist.

Als Referenz zu den elektromechanischen Energiewandler sei hier auf das Buch von Ballas, Pfeifer und Werthschützky[1] verwiesen. In diesem Werk findet der Leser auch eine umfassende Darstellung der Vierpoltheorie elektromechanischer Wandler, die wir hier nur in einem sehr speziellen Rahmen vorstellen werden. Auch das Buch von Küpfmüller[2] enthält eine knappe, aber sehr praxisnahe Behandlung dieses Punktes.

2 Betriebsparameter von Energiewandlern

2.1 Begriffsdefinitionen

Die Eigenschaften piezoelektrischer und magnetischer Wandler lassen sich danach spezifizieren, wie sie die elektrischen Größen Strom I und Spannung U, die an den Anschlußklemmen gemessen werden, in mechanische Bewegungsgrößen, nämlich Kraft F und Stellweg s oder Stellgeschwingigkeit $v = ds/dt$ umsetzen. Wir gehen hier davon aus, daß Kraft und Stellweg bzw. Stellgeschwindigkeit entlang derselben, fest vorgegebenen Achse wirken und definieren sie als z-Achse in einem kartesichen Koordinatensystem. Elektrische und mechanische Größen bezeichnen wir im folgen-

[1] R. G. Ballas, G. Pfeifer, R. Werthschützky, *Elektromechanische Systeme in Mikrotechnik und Mechatronik*, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin und Heidelberg 2000, 2009, ISBN 978-3-540-89317-2, speziell Kap. 5 und 8.

[2] K. Küpfmüller, *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, 10. Aufl., Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1973, Par. 35.

den als *Stellgrößen*, im Unterschied zu den konstruktiv bedingten Eigenschaften bzw. Parametern des Wandlers, die wir fortan als *Wandlerparameter* bezeichnen.

Das Produkt der elektrischen Stellgrößen U und I hat die Dimension einer Leistung. Als mechanische Stellgrößen verwenden wir daher F und v, deren Produkt ebenfalls eine Leistung ist. Hingegen betrachten wir den Stellweg s als eine aus der Stellgeschwindigjeit v abgeleitete Stellgröße, obwohl der Stellweg in der Praxis zweifellos eine der wichtigsten Größen ist. Für ein System, das beispielsweise periodische Schwingungen ausführt, sind $v(t)$ und $s(t)$ allerdings als äquivalent anzusehen. Nach Fouriertransformation können sie durch Multiplikation mit $\mathrm{i}\omega$ leicht ineinander umgerechnet werden.

Von den vier Stellgrößen U, I, F und v, welche die Energieumformung definieren, können an einem gegebenen Energiewandler nur zwei frei gewählt werden, während die übrigen beiden eindeutig bestimmt sind. So kann beispielsweise an die Klemmen eines Wandlers, dessen Arbeitshebel man fixiert (d. h. v zu Null setzt), grundsätzlich jede beliebige Spannung U angelegt werden. Der sich einstellende Strom I und die resultierende Stellkraft F am Arbeitshebels sind dadurch bereits vollkommen bestimmt. Man kann sich leicht davon überlegen, daß in allen anderen Fällen, in denen zwei von vier Stellgrößen durch die Randbedingungen vorgegeben sind, die beiden übrigen über ein Gleichungssystem von mathematischen Beziehungen festgelegt werden, die den Definitionen der Wandlerparameter entsprechen.

2.2 Wandlerparameter

Wir untersuchen zunächst die Wirkung von infinitesimal kleinen Änderungen der Stellgrößen $\mathrm{d}U$, $\mathrm{d}I$, $\mathrm{d}F$ und $\mathrm{d}v$ gegebüber einem beliebig definierten Ruhezustand. Wir legen uns hierbei zunächst willkürlich auf den Strom I und die Stellgeschwindigkeit v als unabhängige, auf U und F als abhängige Größen fest. Es sei aber bereits jetzt vermerkt, daß eine nachträgliche Umrechnung auf jedes andere Paar von unabhängigen Stellgrößen weiterhin möglich ist. Da also $U(I,v)$ und $F(I,v)$ durch I und v vollständig bestimmt sind, läßt sich jede infinitesimale Änderungen dieser Größen durch die entsprechenden Änderungen von I und v ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}U \\ \mathrm{d}F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_i & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}I \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix} \tag{1}$$

Die in der Matrix auftretenden Koeffizienten, die ebenfalls Funktionen von I und v sein dürfen, sind durch die konstruktiven Eigenschaften des Wandlers gegeben und entsprechen den schon erwähnten Wandlerparametern. Im Einzelnen ist

$$Z_i = \left.\frac{\partial U}{\partial I}\right|_v \tag{2}$$

der differentielle elektrische Innenwiderstand des Wandlers, bzw. des Elektromagneten, der sich ergibt, wenn die Stellgeschwindigkeit v bei einer infinitesimalen Stromänderuung $\mathrm{d}I$ konstant gehalten wird, bzw. gleich null ist. Der Innenwiderstand ist durch den ohmschen Widerstand R_m der Wicklung und ihre Induktivität

L_m bestimmt, so daß $Z_i = R_m + \mathrm{i}\omega L_m$ gesetzt werden kann. Weiterhin ist

$$\alpha_1 \;=\; \left.\frac{\partial U}{\partial v}\right|_I \tag{3}$$

die Generatorkonstante des Wandlers. Sie gibt an, wie die Klemmenspannung von einer Änderung der Stellgeschwindigkeit beeinflußt wird, wenn an den Klemmen keine Änderung des Erregerstroms I zugelassen wird, wenn also die Klemmen beispielsweise offen sind und der Strom durch den Wandler gleich null ist.

$$\alpha_2 \;=\; \left.\frac{\partial F}{\partial I}\right|_v \tag{4}$$

ist die Aktorkonstante. Sie gibt an, wie die Stellkraft vom Erregerstrom anhängt. Schließlich ist

$$-\,k \;=\; \left.\frac{\partial F}{\partial v}\right|_I \tag{5}$$

der Koeffizient der inneren Reibung bzw. mechanischen Trägheit des Wandlers. In einem magnetischen Wandler, bei dem der Permanentmagnet berührungsfrei durch die Magnetwicklung bewegt wird, ist der Reibungskoeffizient Null. Wenn der Permanentmaget, der am Schwinger befestigt ist, eine nicht zu vernachlässigende Masse m_p hat, kann dies als $k = -\mathrm{i}\omega m_p$ berücksichtigt werden.

Sollen hingegen Spannung U und Kraft F als unabhängige Stellgrößen verwendet werden, dann ergibt sich durch simple Matrixinversion für die beiden nunmehr abhängigen Größen $I(U,F)$ und $v(U,F)$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}I \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\alpha_1\,\alpha_2 \,+\, Z_i\,k} \begin{pmatrix} k & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -Z_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}U \\ \mathrm{d}F \end{pmatrix} \tag{6}$$

Man beachte, daß die Wandlerparameter im SI-Einheitensystem unterschiedliche Dimensionen besitzen: So hat Z die Dimension $\Omega = \mathrm{V/A}$, α_1 und α_2 die Dimension Vs/m oder alternativ N/A und die Dämpfung k die Dimension Ns/m.

2.3 Berechnung von magnetischen Wandlerparametern

2.3.1 Magnetischer Wegaufnehmer

Ein magnetischer Wegaufnehmer dient zur Umsetzung einer mechanischen Bewegung, vorzugsweise einer Oszillation, in ein elektrisches Signal. Hierzu wird an den Schwinger ein Permanentmagnet mit gegebenem magnetischen Moment $\vec{m}$ montiert, der in eine feststehende Spule taucht. Bei Bewegung des Magneten entsteht an der Spule eine zur augenblicklichen Bewegungsgeschwindigkeit proportionale Spannung.

Das magnetische Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$, das der im Nullpunkt befindliche Permanentmagnet am Punkt $\vec{r}$ des Raums erzeugt, berechnet sich zu[3]

$$\vec{A}(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \tag{7}$$

[3] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, De Gruyter, Berlin 1983, Kap. 5.6. Es sei darauf hingewiesem, daß in diesem Buch andere Einheitensysteme verwendet werden (CGS) als im vorliegenden Bericht (SI). Hieraus ergeben sich Unterschiede in den Vorfaktoren.

Das magnetische Feld ergibt sich hieraus zu $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Wir betrachten nun einen Drahtring C mit Radius R und berechnen die hierin induzierte Spannung. Hierzu werde der Permanentmagnet auf der zur Ringebene senkrechten z-Achse konzentrisch im Abstand a über der Ringebene montiert. Der Magnet wird so angebracht, daß sein magnetisches Moment $\vec{m}$ in Richtung der z-Achse zeigt. Der magnetische Fluß Φ, der durch einen Ring geht, ist gleich

$$\begin{aligned} \Phi(a) &= \oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\vec{m}}{4\pi} \cdot \oint_C \frac{\mathrm{d}\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\vec{m} \cdot \vec{e}_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{\vec{m} \cdot \vec{e}_z}{2} \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{8}$$

Bewegt sich nun der Magnet in z-Richtung mit einer Geschwindigkeit $\dot{a}$ entlang der Ringachse, dann induziert dies im Ring die Spannung

$$U_{\mathrm{ind}}^C(a) = -\dot{a} \frac{\partial \Phi(a)}{\partial a} = \frac{3}{2} \dot{a} \, \vec{m} \cdot \vec{e}_z \frac{R^2 a}{(R^2 + a^2)^{5/2}} \tag{9}$$

In der Praxis verwendet man an Stelle eines Drahtrings eine Spule mit vielen Windungen n, die beispielsweise einlagig auf einen Zylindermantel der Länge L aufgewickelt sind. In diesem Fall berechnet sich die induzierte Spannung zu

$$U_{\mathrm{ind}}(R, L) = \frac{n}{L} \int_{a-L/2}^{a+L/2} U_{\mathrm{ind}}^C(z) \, \mathrm{d}z \tag{10}$$

$$= \dot{a} \, \vec{m} \cdot \vec{e}_z \, n \, \frac{R^2}{L} \left(\frac{1}{\{(a + L/2)^2 + R^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{(a - L/2)^2 + R^2\}^{3/2}} \right)$$

wobei die Position a des Magneten auf den Mittelpunkt der Spule bezogen ist.

Bei einer mehrlagigen Zylinderspule, bei der die Wicklung die Länge L, den Innendurchmesser D_0 und den Außendurchmesser D_1 hat, ergibt sich die induzierte Spannung zu

$$U_{\mathrm{ind}}(D_0, D_1, L) = \frac{2}{D_1 - D_0} \int_{D_0/2}^{D_1/2} U_{\mathrm{ind}}(R, L) \, \mathrm{d}R \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &= \dot{a} \frac{2 \, \vec{m} \cdot \vec{e}_z \, n}{L \, (D_1 - D_0)} \left[\xi_1 \left(\frac{2a + L}{D_1} \right) - \xi_1 \left(\frac{2a + L}{D_0} \right) \right. \\ &\qquad \left. - \xi_1 \left(\frac{2a - L}{D_1} \right) + \xi_1 \left(\frac{2a - L}{D_0} \right) \right] \end{aligned} \tag{12}$$

wobei folgende Funktion auszuwerten ist.

$$\xi_1(x) = \log \left(1 + \sqrt{1 + x^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \tag{13}$$

Somit berechnet sich die Generatorkonstante des Wandlers wie folgt:

$$\alpha_1 \;=\; 2\,\vec{m}\cdot\vec{e}_z\,n\,\frac{\xi_1\left(\frac{2a+L}{D_1}\right) - \xi_1\left(\frac{2a+L}{D_0}\right) - \xi_1\left(\frac{2a-L}{D_1}\right) + \xi_1\left(\frac{2a-L}{D_0}\right)}{L\,(D_1 - D_0)} \tag{14}$$

Man beachte hierbei, daß Gl. (14) für den Fall, daß $a(t)$ eine beliebige Zeitfunktion darstellt, vollkommen exakt und auch bei großen Auslenkungen des Permanentmagneten gültig ist. Die Gleichung stellt allerdings in bezug auf die Größe des Permanentmagneten eine Näherung dar, weil dieser allein durch sein Dipolmoment $\vec{m}$ charakterisiert wird. Dies ist nur dann exakt, wenn der Magnet sehr klein gegen den inneren Spulendurchmesser ist.

2.3.2 Magnetische Aktoren

Die Kraft, die in einem magnetischen Feld $\vec{H}$ auf ein magnetisches Moment $\vec{m}$ ausgeübt wird, berechnet sich zu

$$\vec{F} \;=\; \vec{\nabla}\left(\vec{m}\cdot\vec{H}\right) \tag{15}$$

Auf einen Permanentagneten, der in eine Zylinderspule gesteckt wird und dessen magnetisches Moment entlang der Achse der Spule orientiert ist. reduziert sich dies zu

$$F_z \;=\; \vec{m}\cdot\vec{e}_z\,\frac{\partial H_z}{\partial z} \tag{16}$$

Das magnetische Feld einer Zylinderspule mit der Länge L, dem Innendurchmesser D_0 und dem Außendurchmesser D_1 berechnet sich an der Position z auf der Spulenachse zu

$$\begin{aligned} H_z(z) \;&=\; \frac{n\,I}{L\,(D_1 - D_0)}\left[D_1\,\xi_2\left(\frac{2z+L}{D_1}\right) - D_0\,\xi_2\left(\frac{2z+L}{D_0}\right)\right. \\ &\qquad \left. - D_1\,\xi_2\left(\frac{2z-L}{D_1}\right) + D_0\,\xi_2\left(\frac{2z-L}{D_0}\right)\right] \end{aligned} \tag{17}$$

wobei folgende Funktion auszuwerten ist.

$$\xi_2(x) \;=\; \frac{1}{2}\arctan x \;+\; \frac{x}{4}\log\left(1 + x^2\right) \tag{18}$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} F_z \;&=\; \frac{n\,I\,\vec{m}\cdot\vec{e}_z}{2\,L\,(D_1 - D_0)}\left[\xi_3\left(\frac{2z+L}{D_1}\right) - \xi_3\left(\frac{2z+L}{D_0}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \xi_3\left(\frac{2z-L}{D_1}\right) + \xi_3\left(\frac{2z-L}{D_0}\right)\right] \end{aligned} \tag{19}$$

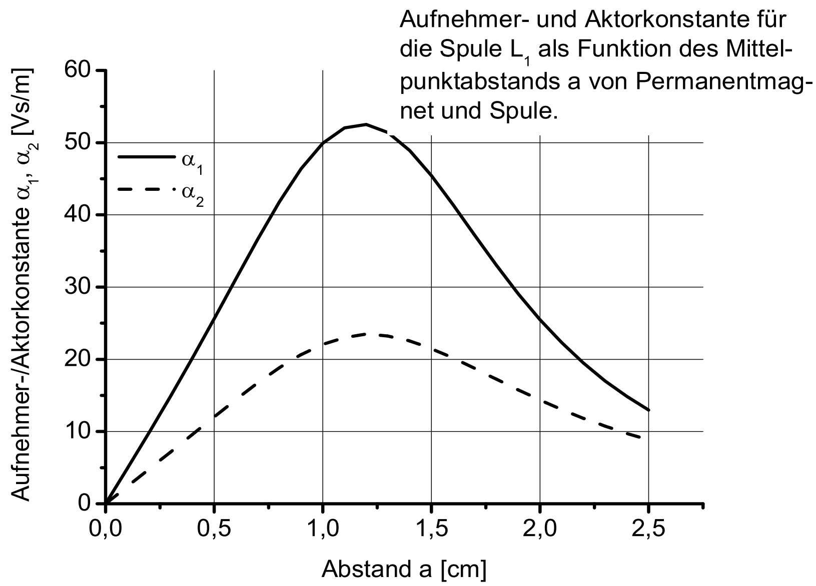
mit

$$\xi_3(x) \;=\; \log\left(1 + x^2\right) \tag{20}$$

Die Aktorkonstante ist somit gleich

$$\alpha_2 \;=\; \vec{m} \cdot \vec{e}_z \, n \, \frac{\xi_3\left(\frac{2a+L}{D_1}\right) \;-\; \xi_3\left(\frac{2a+L}{D_0}\right) \;-\; \xi_3\left(\frac{2a-L}{D_1}\right) \;+\; \xi_3\left(\frac{2a-L}{D_0}\right)}{2\,L\,(D_1 - D_0)} \tag{21}$$

Auch diese Formel ist in Bezug auf die relative Position von Magnet und Spule exakt. Abbildung 1 zeigt die Wandlerparameter für die im Experiment verwendeten Wandler.



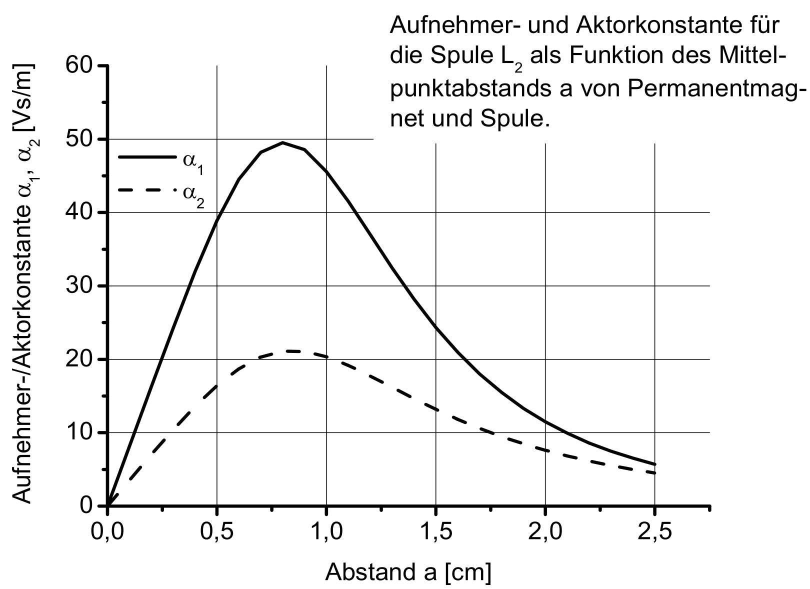


Abbildung 1: Wandlerparameter α_1 und α_2 für die beiden Spulen als Funktion des Abstandes a zwischen Spulenmittelpunkt und Mittelpunkt des Permanentmagneten. Als Permanentmagnet wurde jeweils ein Zylindermagnet aus Neodym-Eisen-Bor-Legierung mit 5 mm Länge und 10 mm Durchmesser verwendet. Die Sättigungsmagnetisierung ist gleich 1,61 T, das magnetische Moment gleich 0,5031 Am.