

L-Culator: Spulen berechnen leicht gemacht

Hans Martin Sauer

E-Mail: sauer-technology@t-online.de

Darmstadt, 8.4.2008

Einführung und Beschreibung des Konstruktionstools „L-Culator_xxx.xls“ für die Berechnung von zylindrischen Elektromagneten und HF-Induktorspulen ohne Eisen- oder Ferritkern.

Inhalt

1. Einführung
2. Angenäherte und exakte Formeln für die Zylinderspule
3. Exakte Formeln für die Feldberechnung
4. Der elektrische Widerstand der Wicklung
5. Elektromagnete und Gleichstromspulen
6. Impulsbetrieb von Zylinderspulen
7. Die Zylinderspule im Schwingkreis
8. Die elektromagnetische Abstrahlung einer Zylinderspule
9. Berechnungs- und Anwendungsbeispiele von Zylinderspule_xxx.xls
10. Vergleich mit anderen Programmen zur Induktivitätsberechnung
11. Vergleich mit experimentellen Befunden.
12. Literaturhinweise

1. Einführung

Die Berechnung von Elektromagneten und Induktionsspulen ist an und für sich eine der elementarsten Aufgaben in der Elektronik, aber in gewisser Hinsicht auch eine der schwierigsten. Dies liegt zum einen an der Vielzahl der verschiedenen Kenngrößen, mit der man eine Spule charakterisieren kann: Induktivität, magnetischer Fluß und magnetische Feldstärke bei gegebenem Erregerstrom, Homogenität des Magnetfeldes usw. Zum anderen komplizieren aber auch die vielfältigen möglichen Bauformen eine fundierte Vorausberechnung, die z. B. zur Konstruktion eines Elektromagneten durchgeführt werden muß. Ganz zu schweigen von diversen ferromagnetischen Materialien, die für Spulenkernen verwendet und hochkomplizierte physikalische Eigenschaften haben können.

In der vorliegenden Dokumentation soll ausschließlich einer einzigen Fragestellung nachgegangen werden, die in der Praxis des Elektroniklabors wohl immer wieder vorkommt: wie berechnet man eine einfache, zylinderförmige Luftspule für beliebige Durchmesser und Spulenlängen, und zwar in quantitativ korrekter Weise ?

Solche Spulen haben zahlreiche Anwendungsgebiete. Sie sind oft die Grundbauform vieler Elektromagnete. Hierbei kommt es darauf an zu wissen, wie groß das magnetische Feld im Innern der Spule als Funktion des Erregerstroms ist. Die Leistungsaufnahme und der elektrische Verlustwiderstand der Wicklung sind wesentliche Größen. Zylinderspulen werden aber auch in der Wechselstrom-, Impuls- und Hochfrequenztechnik eingesetzt: in Transformatoren, als Siebdrosseln, als Schwingkreisspulen, als HF-Induktoren. Hierbei steht dann die Bestimmung der Induktivität im Vordergrund. Bei der Berechnung von Schwingkreisen muß zudem die Dämpfung ermittelt werden. Die Spulenverluste entstehen in erster Linie durch den ohmschen Widerstand der Wicklung, der aufgrund des Skin-Effekts mit steigender Frequenz erheblich anwächst. Bei der Ummagnetisierungserwärmung von ferrithaltigen Materialien ist schließlich die Blindleistung der Spule von größter Bedeutung, ebenso die meist unerwünschte Abstrahlung von Radiowellen.

Zu diesem Zweck wurde das Excel-Rechenblatt „L-Culator_xxx.xls“ entwickelt, das die hier vorgestellten Berechnungsmethoden dem Anwender auf einfachste Weise zugänglich macht. Hierbei bezeichnet das xxx im Dateinamen die Versionsnummer. Die zur Zeit der Herausgabe dieses Berichts aktuelle Version hatte die Nummer 033. Weitere Versionen mit zusätzlichen Features und verbesserten Berechnungsmethoden sind geplant.

2. Angenäherte und exakte Formeln für die Zylinderspule

Eine Zylinderspule ist fast immer die einfachste Lösung, um eine definierte Induktivität oder einen Elektromagneten herzustellen. Auf einen Holz- oder Kunststoffkern mit Durchmesser D_0 und Länge L , auf dessen Stirnseiten Sicherungsscheiben angebracht werden, die ein Herunterfallen der Wicklung oder einzelner Windungen verhindern sollen, werden lagenweise Windungen aus Kupferlackdraht aufgebracht, bis der äußere Wicklungsdurchmesser $D_1 > D_0$ erreicht

ist. Diese Maße legen das Wicklungsvolumen mit Länge L , Innendurchmesser D_0 und Außendurchmesser D_1 fest, durch welches in n Windungen der Erregerstrom I der Wicklung fließt. Im Zentrum sowie in der näheren Umgebung der Spule entsteht somit ein magnetisches Feld. Die Maße dieses Wicklungsvolumen legen unter der Annahme, dass die Erregerstromdichte über den Wicklungsquerschnitt homogen verteilt sei, Stärke und Geometrie dieses Feldes sowie die magnetischen Eigenschaften der Spule bereits vollständig fest.

Im Grenzfall langer Spulen ($L \gg D_1, D_1 \sim D_0$) werden in den Lehrbüchern einfache Näherungsformeln¹ zur Berechnung der Feldstärke H im Innern der Spule wie auch für die Induktivität L_{sp} angegeben:

$$H = \frac{nI}{L} \quad (1)$$

$$L_{sp} = \mu_0 n^2 \frac{A}{L} \quad (2)$$

wobei $A = \frac{\pi}{4} D_0^2$ die Querschnittsfläche des Wicklungshohlraums und μ_0 die Vakuums-Permeabilitätskonstante sind. Die beiden Formeln gelten aber nur im Extremfall sehr langer Spulen, und sie sagen nichts aus über den relativen Einfluß der Wicklungsparameter L , D_1 und D_0 , und deren Optimierungsmöglichkeiten, ebenso wenig wie über den Einfluß der Wicklungsmaße auf die Homogenität des Magnetfeldes im Innern der Spule.

3. Exakte Formeln für die Feldberechnung

Zur Berechnung des exakten Wertes des Magnetfeldes im Mittelpunkt einer Zylinderspule lässt sich an Hand des Ampèreschen Gesetzes

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (3)$$

eine Integralformel ableiten, welche die magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r})$ an jedem beliebigen Ort \vec{r} als Funktion der Stromdichte $\vec{J}(\vec{r}')$ an den verschiedenen Aufpunkten \vec{r}' innerhalb der Wicklung zu berechnen gestattet. Für nähere Informationen sei hier auf die am Ende der Dokumentation angegebene Literatur verwiesen.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (4)$$

¹ Der Vergleich von (1) mit der exakten Formel (5) im Grenzfall langer Zylinderspulen zeigt, dass der korrekte Wert um mehr als 50 % höher liegt als in Gl. (1) angegeben.

L-Culator: Spulenberechnung leicht gemacht

Die Lösung dieses Integrals für jeden Punkt in allgemeiner Form anzugeben ist jedoch außerordentlich schwierig. Immerhin gelingt das für den Mittelpunkt der Spule (der von nun an als Koordinatennullpunkt definiert sei):

$$H(0) = \frac{I n}{D_1 - D_0} \left[\mathcal{G}\left(\frac{D_1}{L}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{D_0}{L}\right) \right] \quad (5)$$

mit

$$\mathcal{G}(x) = x \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log(1 + x^2) \quad (6)$$

Die entsprechende Lösung für beliebige Punkte z entlang der Spulenachse lautet:

$$H(z) = \frac{I n}{L(D_1 - D_0)} \left[\left(z + \frac{L}{2} \right) \left(\mathcal{G}\left(\frac{D_1}{2z + L}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{D_0}{2z + L}\right) \right) - \left(z - \frac{L}{2} \right) \left(\mathcal{G}\left(\frac{D_1}{2z - L}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{D_0}{2z - L}\right) \right) \right] \quad (7)$$

Die Funktion $\mathcal{G}(x)$ ergibt sich aus dem Integral und ist in Abb. 1 skizziert und im Rechenblatt „L-Culator_xxx.xls“ selbstverständlich ebenfalls implementiert.

Eine weitere sehr wichtige Größe ist die Inhomogenität des Magnetfeldes in der Spulenmitte. Ganz offensichtlich nimmt die Feldstärke entlang der Spulenachse nach außen hin ab, da man sich hierbei ja von den stromdurchflossenen Windungen der Spule entfernt. Während die erste Ableitung dH/dz in der Spulenmitte aus Symmetriegründen identisch verschwindet, ist die zweite Ableitung d^2H/dz^2 ein gutes Maß für den Bereich, in welchem das Spulenfeld näherungsweise konstant ist. In einer axialen Entfernung z und einer radialen Entfernung r von Spulenmittelpunkt gilt in führender Näherung:

$$H(z, r) \approx H(0) - \frac{\beta}{2} \left(\frac{z^2}{L^2} - \frac{r^2}{2L^2} \right) \quad (8)$$

mit

$$\beta = \frac{4 I n}{D_1 - D_0} \left[\left(\frac{D_1}{L} \right)^2 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{D_1}{L} \right)^2 \right)} - \left(\frac{D_0}{L} \right)^2 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{D_0}{L} \right)^2 \right)} \right] \quad (9)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Feldkrümmung β eine positive Größe ist. Dies bedeutet, dass innerhalb des Spulenhohlraums die Feldstärke mit dem Abstand r von der Spulenmitte zunimmt, wenn man von der Spulenmitte aus in der Querschnittsebene zur Innenseite der Wicklung geht.

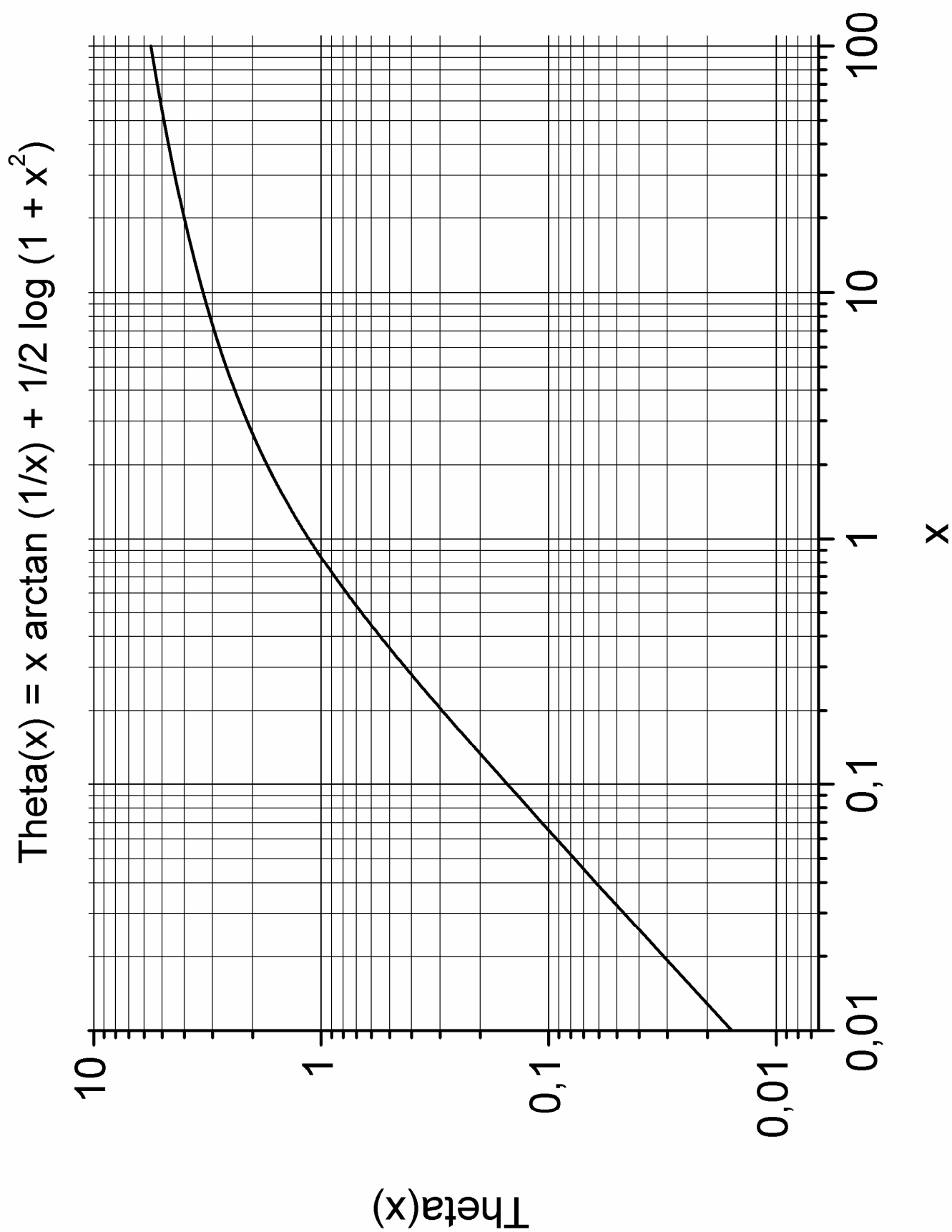


Abb. 1: Die Funktion $\vartheta(x)$ für die Feldstärkeberechnung

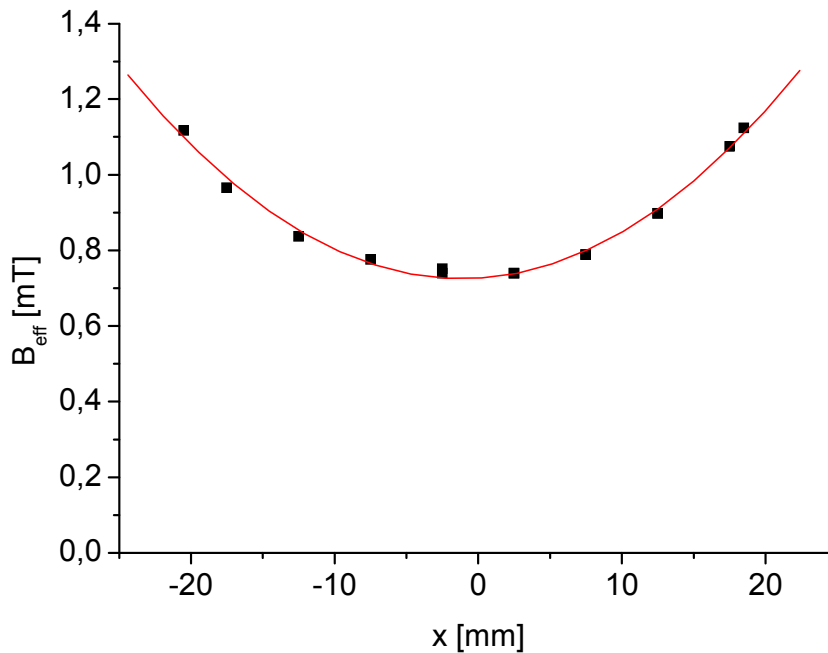


Abb. 2: Die Feldstärke in einer Zylinderspule entlang eines Durchmessers, der durch den Mittelpunkt geht. Die Feldstärke nimmt zum Rand hin in guter Näherung mit dem Quadrat des Abstandes von der Spulenachse zu (rot gezeichnete Parabelkurve, vgl. Gleichung (8)). Die hier gezeigte Messung wurde mittels einer Induktionssonde an einer HF-Induktionsspule bei 250 kHz durchgeführt.

Praktische Messungen an einer Vielzahl von Zylinderspulen haben nun gezeigt, dass die parabelförmige Zunahme der Feldstärke mit r^2 innerhalb der durch den Mittelpunkt gehenden Querschnittsebene eine recht gute Näherung des tatsächlichen Verlaufs der Feldstärke darstellt (siehe Abb. 2). Die exakte Lösung des Integrals (4) kann daher für alle praktischen Zwecke umgangen werden, wenn zum Beispiel der magnetische Fluß Φ durch die Spule berechnet werden soll. Dieser entspricht dem Integral der Feldstärke über den Wicklungsquerschnitt:

$$\Phi = \mu_0 \int \vec{H} \cdot d\vec{A} = 2\pi\mu_0 \int_0^{D_0} H(0,r) r dr \quad (10)$$

Einsetzen von Gleichung (8) ergibt dann

$$\Phi = \mu_0 \pi \left(D_0^2 H(0) - \frac{1}{8} D_0^4 \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \Big|_{r=z=0} \right) \quad (11)$$

Allerdings berücksichtigt diese Formel nur denjenigen Anteil des magnetischen Flusses, der durch den leeren Innenquerschnitt der Spule fließt. Bei der Berechnung der Induktivität nach der Formel

$$L_{sp} = \frac{n\Phi}{I} \quad (12)$$

erhält man daher einen systematisch zu geringen Wert, denn ein gewisser Teil der magnetischen Feldlinien bleibt innerhalb des Wicklungsvolumens eingeschlossen, trägt aber trotzdem zur Selbstinduktion bei. Man kann diesen Beitrag über eine einfache Interpolation abschätzen. Hierbei wird angenommen, dass die magnetische Feldstärke von ihrem Maximalwert am Innenrand ($r = D_0/2$) bis zum mittleren Radius $(D_1 + D_0)/2$ linear auf Null abfällt. Der sich dadurch ergebende Fluß berechnet sich zu

$$\Phi_{int} \approx \frac{\mu_0 H(r = D_0)}{2} \frac{\pi}{4} (D_1 + 3D_0) \frac{1}{4} (D_1 - D_0) \quad (13)$$

Die Korrektur des inneren Flusses der Wicklung ist vor allen Dingen bei Spulen mit $D_1 \gg D_0$ wesentlich. Die Spuleninduktivität lässt sich nun zu

$$L_{sp} = \frac{n(\Phi + \Phi_{int})}{I} \quad (14)$$

recht genau abschätzen. Diese Formel ist wesentlich genauer als Gl. (2) und gilt vor allem auch für beliebige Verhältnisse von Wicklungsdurchmessern und –Längen.

4. Der elektrische Widerstand der Wicklung

Die Berechnung des elektrischen Widerstandes einer Wicklung beruht auf der bekannten Formel, wonach dieser zur Länge des Spulendrahtes und seinem spezifischen Widerstand proportional ist. Hierbei sind jedoch drei wesentliche Korrekturfaktoren zu berücksichtigen.

Die Länge des Spulendrahtes, die im Wicklungsvolumen untergebracht werden kann, hängt neben dem Drahtquerschnitt auch von der Dichte der Wicklung ab. Man kann dies durch den Wicklungsfüllfaktor f angeben. Dieser ist gleich dem Verhältnis aus dem Kupfervolumen der Wicklung und dem geometrischen Wicklungsvolumen, das sich aus dem Innen- und Außenradius und der Wicklungslänge ergibt. Rein theoretisch sind bei runden Wicklungsdrähten Füllfaktoren von $\pi/4 = 78,5 \%$ möglich. Praktisch erreicht man je nach Dicke der Lackisolation der Drähte und nach der Sorgfalt, die beim Aufrollen des Wicklungsdrahtes aufgebracht wurde, Werte zwischen 45 und 65 %.

Ein weiterer Parameter ist die Zunahme des elektrischen Widerstandes mit der Temperatur. Die meisten Metalle wie auch das bei der Herstellung der Wicklung eingesetzte Kupfer erhöhen ihren spezifischen Widerstand mit jedem Grad Temperaturerhöhung um 0,4 %.

$$\rho(T) = \rho(20^{\circ}\text{C}) [1 + 0,004 (T - 20^{\circ}\text{C})] \quad (15)$$

In entsprechendem Maße steigt bei gegebenem Spulenstrom die Verlustleistung der Spule. Dies kann in Elektromagneten zu einer weiteren Erwärmung der Spule führen.

Wenn zudem die Spule mit hochfrequentem Wechselstrom betrieben wird, entsteht durch den so genannten Skin-Effekt eine weitere Quelle ohmschen Widerstandes. Der Spulenstrom neigt bei hohen Frequenzen dazu, nicht mehr den gesamten zur Verfügung stehenden Leiterquerschnitt auszunutzen. Er fließt vielmehr nur noch in einer dünnen Schicht an der Oberfläche des Drahtes. Die Dicke dieser Schicht entspricht der elektromagnetischen Eindringtiefe. Bei einer Frequenz von z.B. 300 kHz beträgt die Eindringtiefe nur noch etwa 170 μm . Ein Maß für die praktische Bedeutung des Skin-Effekts in einer Wicklung ist der Schirmfaktor s , der vom Drahtdurchmesser d , der Kreisfrequenz ω und dem spezifischen Widerstand des Leiters abhängt:

$$s(T, \omega) = \frac{d}{4} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{\rho(T)}} \quad (16)$$

Nur für den Fall, dass dieser Faktor deutlich kleiner ist als 1, kann bei der Bemessung der Spule vom Skin-Effekt abgesehen werden.

Allgemein lässt sich der Widerstand des Wicklungsdrahtes nach folgender Formel mit hoher Genauigkeit berechnen:

$$R(T, \omega) = \rho_{\text{Cu}} \pi n \frac{D_1 + D_0}{2} \frac{K(T, \omega)}{\frac{\pi}{4} d^2} (1 + 0,004 [T - 20^{\circ}\text{C}]) \quad (17)$$

Hierbei ist $K(T, \omega)$ der dem Skin-Effekt zuzuschreibende Korrekturfaktor:

$$\begin{aligned} s \leq 1: \quad K(T, \omega) &= 1 + \frac{s^4}{3} \\ s > 1: \quad K(T, \omega) &= s + \frac{1}{4} + \frac{3}{64s} \end{aligned} \quad (18)$$

Hierin sind allerdings noch nicht die Wirbelstromverluste enthalten, die von einer Windung der Spule in ihren Nachbarwindungen induziert werden. Diese können durchaus erhebliche Werte annehmen, insbesondere bei sehr dicht gewickelten Spulen. Qualitativ gibt die Berechnung des Skineffekts, wie sie oben gezeigt wurde, oft schon eine hinreichend gute Auskunft über die Eigenschaften der Wicklung.

Die Verlustleistung P der Spule berechnet sich bei gegebenem Erregerstrom I nun zu

$$P = I^2 R(T, \omega) \quad (19)$$

und ist eine komplizierte Funktion der Betriebstemperatur wie auch der Arbeitsfrequenz.

5. Elektromagnete und Gleichstromspulen

Im Labor benötigt man für spezielle Messungen bisweilen ein konstantes Magnetfeld: sei es für magnetische Materialuntersuchung (Aufnahme der Magnetisierungskurve, Bestimmung der Hall-Konstanten), für die Kernspin- (NMR) und Elektronenspinresonanz (ESR), zur Beeinflussung von Elektronenstrahlen, und nicht zuletzt für Lehrzwecke und zur Demonstration grundlegender elektrotechnischer Zusammenhänge.

Hierbei kommt es einerseits darauf an, die von einer Spule bei gegebenem Erregerstrom erzeugte Feldstärke möglichst präzise zu kennen. In der Regel steht dem Experimentator nämlich kein teures Gaußmeter zur Verfügung. Er steht dann vor dem elementaren Problem, die Feldstärke genau beziffern zu müssen, um seine weiteren Messungen darauf abgleichen zu können. Hier kann die Lösung nun einfach darin bestehen, die Feldstärke einer vorhandenen Zylinderluftspule an Hand ihrer Maße mittels Gleichung (5) zu berechnen und diese dann zur Kalibrierung aller zur Verfügung stehenden Meßmittel einzusetzen, z.B. einer Hall-Sonde, die im Fachhandel für wenig Geld bezogen werden kann. Die Feldstärkeberechnung der Zylinderspule gilt selbstverständlich auch für den Wechselstrombetrieb, so dass auch die Kalibrierung einer einfachen Induktionssonde möglich ist. Hiermit lassen sich dann bequem Stärke und Ausrichtung des magnetischen Wechselfeldes an verschiedenen Orten außerhalb der Spule untersuchen.

In solchen Anwendungsfällen besteht das primäre Ziel zunächst darin, mit der zur Verfügung stehenden elektrischen Leistung eine möglichst hohe Feldstärke zu erzeugen. Dies gelingt sicher nicht mit der anfangs diskutierten langen Zylinderspule, wie sie in der vereinfachten Gleichung (1) vorausgesetzt wurde. Hohe Feldstärken erzielt man in erster Linie dann, wenn bei gegebener Amperewindungszahl der Spule die Länge der magnetischen Feldlinien möglichst kurz ist. Diese müssen sich außerhalb der Spule wieder schließen können. Daher sind kurze Spulen tendenziell günstiger als lange. Außerdem sollte die Dicke der Wicklung $D_1 - D_0$ nicht zu groß sein. Andererseits erfordern kurze und dünn gewickelte Spulen die Verwendung kleiner Drahtquerschnitte. Dadurch steigen der ohmsche Widerstand und somit die Verlustleistung stark an. Ein ausgewogenes Verhältnis zwischen Länge, Innen- und Außendurchmesser der Wicklung scheint daher das Optimum darzustellen. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass die Konstruktion einer optimalen Wicklung der Aufgabe entspricht, das Verhältnis

$$\tau_{sp} = \frac{\mu_0 H^2(0) V_{sp}}{2 P} \quad (20)$$

zu maximieren. Dieses Verhältnis hat die Dimension einer Zeit. Grob gesagt entspricht dieser Wert der Zeitdauer, für welche die in der Spule enthaltene

Feldenergie $U \approx \frac{\mu_0}{2} H^2(0) V_{sp}$ in der Lage ist, bei kurzgeschlossenen Klemmen den Erregerstrom aufrecht zu erhalten. Hierbei ist V_{sp} das Innenvolumen der Spule.

Hier sei nun auf ein wichtiges Merkmal hingewiesen, das alle Magnetspulen mit der Zylinderspule teilen: die Verlustleistung P der Spule hängt bei gegebenem Wicklungsfüllfaktor f nicht vom Durchmesser d des Wickeldrahtes ab. Zwar hat eine Wicklung, die aus dünnem Kupferdraht gefertigt ist, einen entsprechend hohen Widerstand. Dafür ist aber die Windungszahl größer als bei einer Wicklung, die aus stärkerem Draht besteht. Entsprechend kleiner ist die zur Erzeugung einer bestimmten Feldstärke erforderliche Stromstärke. Letzten Endes kommt es nur und ausschließlich auf die mittlere Stromdichte J innerhalb der Wicklung an. Diese legt sowohl die magnetische Feldstärke H fest als auch die Verlustleistung P . Es ist vollkommen gleichgültig, ob man diese Stromdichte mit dünnem oder dickem Wicklungsdraht realisiert.

Bei der Auswahl der optimalen Drahtstärke sollte man sich vielmehr von den zur Verfügung stehenden Stromquellen leiten lassen. Diese geben das Maximum an Leistung bei einer bestimmten Spannung und Stromstärke ab. Wenn eine Stromquelle vorhanden ist, die bei einer Spannung von 12 V einen maximalen Strom von 3 A abzugeben vermag, dann ist es ganz offensichtlich, dass eine Spule mit 4 Ohm Gleichstromwiderstand das beste Ergebnis erbringen wird. Entsprechend sollte dann die Drahtstärke der Wicklung ausgewählt werden. Erfahrungsgemäß ist es günstig, den Spulenwiderstand für eine erhöhte Temperatur zu spezifizieren, da sich die Spule bei längerem Betrieb erwärmt und Erregerstrom sowie Feldstärke bei konstanter Versorgungsspannung entsprechend abnehmen.

Grundsätzlich wird der Betrieb von Gleichstromspulen bei hoher Leistung durch die Verwendung von Konstantstromquellen einfacher, da hier die Feldstärke auch mit zunehmender Spulentemperatur gleich bleibt. Zahlreiche stabilisierte Netzgeräte, die als Stromquellen in Frage kommen, erlauben den Betrieb als Konstantstromquelle. Man sollte hier jedoch stets auf die Temperatur der Spule achten. Mit zunehmender Temperatur wachsen Widerstand und Klemmenspannung nämlich an, ebenso die Verlustleistung. Dies bedingt eine neuerliche Beschleunigung des Temperaturanstiegs der Spule. Hier sollte man die Spule vor einem thermischen „Runaway“ schützen.

Neben der Feldstärke in der Spulenmitte kommt auch der Feldhomogenität in der Spule eine große Bedeutung zu. Man muß hierbei zwischen der Abweichung des Betrags der Feldstärke und der Richtungsfehlweisung unterscheiden. In der Spulenmitte sowie auf der Spulenachse sind die Feldlinien exakt axial ausgerichtet. Das Feld nimmt aber mit der Entfernung von der Mitte stetig ab. Mittels der Gleichungen (8) und (9) lässt sich nun auf einfache Weise die Länge s des Bereiches um die Spulenmitte abschätzen, in dem die Feldstärke um höchstens den Prozentsatz Δ von der Feldstärke in der Spulenmitte abweicht:

$$s(\Delta) = L \sqrt{\frac{8H(0)\Delta}{\beta}} = L \sqrt{\frac{2 \left[\mathcal{G}\left(\frac{D_1}{L}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{D_0}{L}\right) \right] \Delta}{\left(\frac{D_1}{L}\right)^2 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{D_1}{L}\right)^2\right)} - \left(\frac{D_0}{L}\right)^2 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{D_0}{L}\right)^2\right)}}} \quad (21)$$

Dieser Parameter ist eine reine Funktion der Geometrieparameter L , D_1 und D_0 der Wicklung.

Betrachtet man die Feldstärkeänderung in radiale Richtung, so ist hier anzumerken, dass der Betrag der Feldstärke nach außen hin zunächst zunimmt. Gleichwohl ist in der Querschnittsebene, die durch den Spulenmittelpunkt geht, das Feld ebenfalls exakt axial ausgerichtet. Der Durchmesser des Bereichs im dem auch hier die Feldstärke um weniger als Δ zunimmt, ist um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als die Länge $s(\Delta)$.

6. Impulsbetrieb von Zylinderspulen

In bestimmten Meßeinrichtungen wie etwa einem Magnetometer zur Bestimmung von Magnetisierungskurven ist es erforderlich, dass das Magnetfeld zeitlich mit einer bestimmten Geschwindigkeit hoch- und wieder heruntergefahren wird. Dies geschieht in der Regel durch eine spezielle Steuerelektronik, mit der sowohl die Form des Erregersignals als auch seine Amplitude gewählt werden kann. Bei einigen Meßverfahren wie zum Beispiel ESR-Untersuchungen ist es ferner zweckmäßig, das Magnetfeld möglichst rasch zu verändern. Dies ist vor allem dann der Fall, wenn das jeweilige Meßsignal als Funktion der Feldstärke auf dem Oszilloskop unmittelbar angezeigt werden soll. Um nun eine rasche Änderung des Magnetfelds zu erzielen, müssen Steuerelektronik und Spule aufeinander abgestimmt sein, zumal die Spule auf jede Veränderung ihres Erregerstroms mit einer zum Teil erheblichen Selbstinduktionsspannung reagiert. Diese kann die Funktion der Steuerelektronik erheblich beeinträchtigen. Nach dem Induktionsgesetz berechnet sich die Induktionsspannung an den Anschlußklemmen aus der Änderung des magnetischen Flusses:

$$U_{ind} = -n \frac{d\Phi}{dt} \quad (22)$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass der Spannungsstoß, d.h. das Integral der Induktionsspannung $U_{ind}(t)$ über die Zeit bei gegebener Flußänderung unabänderlich gleich ist:

$$U_{ind} \Delta t = -n \Delta \Phi \quad (23)$$

Eine Steuerelektronik, die eine rasche Änderung des magnetischen Flusses herbeiführen will, muß also hohe Gegeninduktionsspannungen aushalten können. Wenn aber die Gegeninduktion klein sein soll, dann muß die Flußänderung notwendigerweise ausreichend langsam vorgenommen werden. Dies begrenzt die Geschwindigkeit der beabsichtigten Magnetfeldänderung.

Als charakteristische Zeitskala, auf der wesentliche Änderungen des Magnetfeldes in einer Spule möglich sind, kann die Stromanstiegszeit angesehen werden. Sie bezeichnet die Zeitdauer nach dem Anlegen einer Spannung an die Anschlußklemmen der Spule, bis zu der der Erregerstrom auf 63 % ihres Endwertes angestiegen ist. Hierbei wird vorausgesetzt, dass der Innenwiderstand der Spannungsquelle gleich Null ist.

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (24)$$

Sie kann auf einfache Weise aus der Spuleninduktivität L und dem ohmschen Widerstand R bestimmt werden. Diese Beziehung kann nicht nur für den Gleichstrombetrieb, sondern auch bei Wechselspannung verwendet werden. Die Stromanstiegszeit beschreibt hier dann die Zeitspanne, in der die einhüllende Funktion des sinusförmigen Wechselstroms den entsprechenden Anteil seines Endwertes erreicht hat. Man sollte hierbei allerdings beachten, dass τ hier keineswegs konstant ist, sondern eine Funktion der Frequenz des Wechselstromsignals. Dies ist eine Folge des schon behandelten Skin-Effekts, wonach der ohmsche Widerstand der Spule mit steigender Frequenz allmählich zunimmt. Infolgedessen nimmt die Stromanstiegszeit mit steigender Frequenz langsam ab.

7. Die Zylinderspule im Schwingkreis

Eine wichtige Verwendung von Zylinderluftspule liegt in der Hochfrequenztechnik. Hier dienen sie zum Aufbau von Resonanzkreisen, und zwar insbesondere dann, wenn hohe Leistungen im Spiel sind und magnetische Kerne aus Eisenblech oder Ferrit wegen der anfallenden Verlustleistung nicht verwendet werden können.

Schaltet man der Spule einen Kondensator C parallel, dann ergibt sich für die Schaltung ein komplexer Resonanzwiderstand $Z(\omega)$:

$$Z(\omega) = \frac{1}{L^2 C^2} \frac{R + i\omega C L^2 \left(\omega_{res}^2 - \frac{R^2}{2L^2} - \omega^2 \right)}{\left(\omega^2 - \omega_{res}^2 \right)^2 + \frac{R^2}{L^2} \left(\omega_{res}^2 + \frac{R^2}{4L^2} \right)} \quad (25)$$

der bei der Resonanzfrequenz

L-Culator: Spulenberechnung leicht gemacht

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (26)$$

ein Resonanzmaximum besitzt, jedenfalls sofern der Verlustwiderstand R der Spule den kritischen Wert $R_{krit} = \sqrt{2L/C}$ nicht überschreitet. Der Resonanzwiderstand wird in HF-Oszillatoren beispielsweise als Arbeitswiderstand von Leistungsverstärkern eingesetzt. Er lässt sich aus Gl. (25) durch Einsetzen der Resonanzfrequenz leicht berechnen:

$$Z_{res} = \frac{L}{RC} \quad (27)$$

Umgekehrt berechnet sich die Parallelkapazität, die einer gegebenen Spule parallel geschaltet werden muß, um bei der gegebenen Arbeitsfrequenz eine Parallelresonanz zu erhalten, zu

$$C_{res} = \frac{1}{L \left(4\pi^2 f^2 + \frac{R^2}{2L^2} \right)} \quad (28)$$

Diese Gleichung besitzt unter allen Umständen eine Lösung. Allerdings kann bei hohen Frequenzen bisweilen nicht mehr die Eigenkapazität der Wicklung vernachlässigt werden. Im extremen Fall hat die Spule bereits so viel Kapazität, dass sie selbst als Schwingkreis behandelt werden muß. Man spricht hier von der kritischen Frequenz der Spule. In diesem Fall stößt die hier gezeigte Behandlung der Zylinderspule an ihre Grenzen, und es müssen völlig andere Berechnungsverfahren eingesetzt werden.

8. Die elektromagnetische Abstrahlung einer Zylinderspule

Betrieibt man eine Spule mit Wechselstrom, dann entsteht hierdurch zunächst nur in der unmittelbaren Umgebung ein magnetisches Feld, das mit der dritten Potenz des Abstandes (d.h. mit $1/r^3$) von der Spule abnimmt. In größerer Entfernung ist von diesem so genannten Nahfeld daher nichts mehr wahrzunehmen. Zwar entsteht in der Umgebung der Spule ein magnetisches Wechselfeld, das eine enorme Blindleistung verkörpern kann. Solange aber die Felder und Erregerströme überall die gleiche Phasenlage haben, fließt diese Leistung nicht in die Umgebung ab. Sie gibt vielmehr ihre Energie restlos wieder an die Spule (oder an Gegenstände in der unmittelbaren Umgebung) ab.

Da andererseits die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen zwar mit großer, aber doch endlicher Geschwindigkeit erfolgt, entsteht zwischen dem Erregerstrom und den weiter nach außen reichenden Feldlinien tatsächlich aber ein wenn auch kleiner Phasenfehler. Diese Feldlinien können nicht mehr vollständig in der Spule absorbiert werden, sondern lösen sich von ihr ab und bilden das so genannte Fernfeld. Dieses

nimmt nur mit $1/r$ nach außen hin ab und stellt somit eine weithin nachweisbare „Radiowelle“ dar.

Die Intensität des Fernfeldes lässt sich in sehr guter Näherung aus dem magnetischen Dipolmoment der Spule berechnen. Dieses ist gleich dem Produkt aus Amperewindungszahl und Querschnittsfläche der Spule. Im vorliegenden Fall einer allgemeinen Zylinderspule berechnet sich das magnetische Dipolmoment zu

$$m = \frac{\pi}{12} (D_1^2 + D_1 D_0 + D_0^2) n I \quad (29)$$

Das magnetische Moment hat die Dimension Am^2 . Die hiervon ausgehende Strahlungsdichte in Richtung eines infinitesimalen Raumwinkелеlements, das um den Winkel ϑ gegen die Spulenachse geneigt ist, berechnet sich zu

$$\frac{\Delta P}{\Delta \Omega} = \frac{\pi^3}{2} \frac{f^4 m^2}{\varepsilon_0 c^5} \sin^2 \vartheta \quad (30)$$

und nimmt mit der vierten Potenz der Frequenz zu. Die Gesamtleistung der abgestrahlten Welle beträgt

$$P_{\text{tot}} = \frac{4\pi^4}{3} \frac{f^4 m^2}{\varepsilon_0 c^5} \quad (31)$$

In vielen Fällen ist diese Leistung im Vergleich zur Verlustleistung der Spule außerordentlich klein. Sie ist für die Entwicklung von HF-Induktoren oder Tesla-Transformatoren hoher Leistung dennoch von großer Bedeutung, da sich hieraus merkliche Störungen des Funkverkehrs ergeben können.

Generell setzt sich die Abstrahlung einer Zylinderspule und der angeschlossenen Baugruppen aus dem elektrischen und dem magnetischen Dipolfeld der gesamten Anordnung zusammen. Während das elektrische Dipolfeld in vielen Fällen durch geeignete Erdungs- und Abschirmmaßnahmen an den Zuleitungen beseitigt werden kann, ist das magnetische Dipolmoment einer freistehenden Hochfrequenzspule eine kaum zu unterdrückende Strahlungsquelle. Im Prinzip ist hier eine Abschirmung nur durch einen Metallbehälter möglich, der die Spule einschließt.

9. Berechnungs- und Anwendungsbeispiele von L-Culator_xxx.xls

a. Gleichstromspule

Die Wicklung einer Zylinderspule, die für Kalibrierzwecke geeignet ist, hat eine Länge $L = 22,5$ mm, einen Innendurchmesser $D_0 = 29$ mm und Außendurchmesser $D_1 = 49$ mm. Die Wicklung besteht aus 60 m Kupferlackdraht mit einer Stärke von 0,6 mm. Zur Erzielung eines möglichst hohen Kupferfüllgrades ($f = 0,66$) und einer hohen mechanischen Stabilität wurde der Draht an einer Drehbank in 17 Lagen mit je 31 Windungen aufgebracht und nach jeder Lage mit Tauchlack behandelt. Die Spule hat also 527 Windungen. Der Spulenkörper wurde aus trockenem Buchenholz gedreht. Die Holzdicke auf der Innenseite der Wicklung liegt bei 1,5 mm, so dass der nutzbare Innenraum einen Durchmesser von 26 mm hat. Da Buchenholz im Gegensatz zu den meisten Kunststoffen nur einen geringen thermischen Ausdehnungskoeffizient hat, behält die Wicklung auch bei hoher Temperatur ihre exakt zylindrische Form. Die Verwendung eines Spulenkörpers aus Metall kam wegen der Wirbelströme nicht in Frage. Zum Anschluß der Spule wurde eine Holzleiste angeklebt, in die 4-mm-Messingbuchsen eingelassen sind. Der Widerstand der Wicklung bei 40 °C beträgt 4,3 Ohm, bei 90 °C beträgt er 5,0 Ohm.

Bei einem Spulenstrom von 1 A beträgt die Feldstärke in der Spulenmitte 15,6 mT. Dieser Wert konnte mit einem Gaußmeter (Lakeshore 410) sehr genau bestätigt werden. In einem Abstand von 1 cm von der Mitte in axiale Richtung beträgt die Feldstärke noch immer 13,3 mT. Feldstärke und Feldhomogenität sind daher für die Kalibrierung von einfachen Magnetfeldsonden vollkommen ausreichend.

Die Induktivität berechnet sich zu 5,96 mT. Messungen an einem Schwingkreis haben hier 6,6 mT ergeben. Allerdings war die tatsächliche Toleranz des Schwingkreiskondensators nicht näher spezifiziert.

Die Spule hält im Dauerbetrieb einen Erregerstrom von 1,5 A aus, ohne dass die Temperatur an der Außenseite der Wicklung 90 °C überschreiten würde. Dies entspricht einer Verlustleistung von 11,2 W. Kurzzeitig sind natürlich wesentlich höhere Ströme möglich.

Da die Spule auch in einem Magnetometer im Impulsbetrieb eingesetzt wird, ist die Stromanstiegszeit wichtig. Diese beträgt bei einer Arbeitstemperatur von 60 °C etwa 1,3 ms.

Für Hochfrequenzanwendungen ist die Spule aufgrund ihrer Wicklungskapazität und des Skin-Effekts weniger gut geeignet. In einer Oszillatorschaltung, die mit einer Frequenz von 40 kHz arbeitete, liegt die Klemmenspannung bei einem Erregerstrom von 300 mA schon bei 450 V, was u. U. einen Windungsdurchschlag verursachen kann. Die Feldstärke in der Spulemitte beträgt dann 4,7 mT. Vor allem aber steigt der ohmsche Widerstand hier auf 21 Ohm an, wodurch die Güte des Resonanzkreises erheblich reduziert wird. Selbst bei Verwendung eines idealen, verlustfreien Resonanzkondensators von 2,7 nF ist die Güte des Schwingkreises mit ca. 70 verhältnismäßig bescheiden.

L-Culator: Spulenberechnung leicht gemacht

Wicklungs- und Betriebsdaten:		
Außendurchmesser	4,8	cm
Innendurchmesser	3,5	cm
Länge	3,1	cm
Windungszahl	4	
Spulenstrom	110	A
Frequenz	1950000	Hz
Drahtdurchmesser	7	mm
Anzahl HF-Litzendrähte	1	
Temperatur	25	°C
Abstand z vom Zentrum	4	cm
Konstruktionsdaten		
Drahtlänge	0,52	m
Kupferquerschnitt	38,48	mm ²
elektr. Widerstand	88,46	mOhm
Volumen der Wicklung	26,27	cm ³
Kupfer-Füllgrad	76,42	%
Masse (nur Kupfer)	152,58	g
Magnetische Felder und Selbstinduktion		
Feldstärke H(0)*	9.141,98	A/m
Flußdichte B(0)*	11,49	mT
Feldstärke H(z)*	2.438,29	A/m
Flußdichte B(z)*	3,0640	mT
Induktivität	0,44	µH
Klemmenspannung*	588,20	V
Phasenverschiebung	89,05	°
Stromanstiegszeit	0,00	ms
Spulen-Blindleistung*	64,69	kW
Blindleistungsdichte* (Mitte)	643,39	W/cm ³
Blindleistungsdichte* am Pkt. z	45,77	W/cm ³
Verlustleistung*	1.070,39	W
Hochfrequenzspezifische Eigenschaften		
Resonanzkapazität	15,262	nF
Max. Resonanzgüte*	60,44	
Resonanzwiderstand*	0,16	kΩ
magn. Dipolmoment*	6,00E-01	Am ²
magn. Dipolstrahlung*	31,4380	µW

Abb. 3: Rechenblatt von L-Culator_033 mit den Daten der Induktionsspule. Die rot markierten Zahlen wurden an die Geometrie- und Messdaten angepasst.

b. HF-Induktorspule

Die Induktionsspule eines Hochfrequenzinduktionsgeräts besteht aus 4 Windungen, die aus 7 mm dickem Kupferrohr hergestellt sind. Außen- und Innendurchmesser der Spule betragen etwa 48 bzw. 35 mm, die Spulenlänge ist 31 mm. Die Frequenz des HF-Generators ist 1,95 MHz. Man kann davon ausgehen, dass die elektromagnetische Eindringtiefe des Stromes im Kupferrohr geringer ist als seine Wandstärke und die Spule unter Berücksichtigung des Skin-Effekts wie eine Volldrahtspule behandeln. Das Kupferrohr wird von Wasser durchflossen, welches die Spule auf Raumtemperatur hält. Bei einer Feldstärkemessung wird auf der Spulenachse in einer Entfernung von 40 mm vom Spulenmittelpunkt eine Feldstärke von 3 mT gemessen. Diese Werte werden im Rechenblatt „L-Culator_xxx.xls“ eingetragen. Im Feld „Spulenstrom“ wird der Eintrag so gewählt, dass im Feld „Flußdichte $B(z)$ “ der Wert 3 mT erscheint.

Hieraus ergeben sich durch Rechnung folgende weiteren Daten. Der erforderliche Spulenstrom beträgt nach Gl. (7) 110 A. Die resultierende Klemmenspannung beträgt etwa 590 V. Hieraus berechnet sich für die Spulenmitte eine Feldstärke von 11,5 mT. Der ohmsche Widerstand der Spule liegt bei 88,5 Milliohm, woraus sich eine Verlustleistung von 1070 W ergibt. Die Induktivität ist gleich 0,44 μH . Die Gesamt-Blindleistung der Spule beträgt 64,7 kW, die Blindleistungsichte in der Spulenmitte ist gleich 45,7 W/cm³.

Aus der Induktivität der Spule von 0,44 μH würde sich bei 1,95 MHz theoretisch eine Resonanzkapazität von 15,3 nF ergeben. Dies ist im vorliegenden Fall allerdings nicht relevant, da die Spule innerhalb des Generators mit einer weiteren Induktivität in Reihe geschaltet ist.

Das magnetische Moment der Spule ist gleich 0,6 Am², wodurch sich wiederum eine elektromagnetische Abstrahlung von 31,4 μW ergibt

10. Vergleich mit anderen Programmen zur Induktivitätsberechnung

Um einschätzen zu können, wie genau die Induktivitätsberechnung des L-Culators im Vergleich zu anderen Programmen und Utilities ist, die man ebenfalls im Internet findet, wurden drei Beispiele durchgerechnet, die auch extreme Aspektverhältnisse der Wicklung mit einschließen.

Spule 1:

Flachspule 20 Windungen: Außendurchmesser: 60 mm, Innendurchmesser: 10 mm, gewickelt mit 1,0 mm CuL.

Spule 2:

Magnetspule mit 600 Windungen 0,6 mm CuL, Außendurchmesser: 5,0 cm Innendurchmesser 2,5 cm, Länge: 2,2 cm

Spule 3:

Langspule: 200 Windungen 0,4 mm CuL, Durchmesser 20 mm, Länge 200 mm

Als Vergleich wurden folgende Internet-Rechner der Spuleninduktivität verwendet, die zumeist auf anderen Berechnungsalgorithmen beruhen.

L-Culator: Spulenberechnung leicht gemacht

- A. Helical Coil Calculator http://www.deepfriedneon.com/tesla_f_calchelix.html und Flat Spiral Coil Calculator http://www.deepfriedneon.com/tesla_f_calcspiral.html
B. Captain's Universe Coil Calculator: <http://www.captain.at/electronics/coils/>
C. "Stay tuned" crystal radio web site <http://www.crystalradio.net/cal/indcal.shtml>

Zu beachten ist, daß die Spulenmaße bei einigen dieser Rechner nicht direkt eingegeben werden können. Vielmehr ergibt sich die z.B. Spulenlänge bzw. der Außendurchmessers im Rechner A indirekt aus der Drahtstärke und dem entsprechend einzusetzenden Windungsabstand. Es wurde stets darauf geachtet, dass diese Eingaben mit den obigen Spulenwerten konsistent waren.

Ergebnisse:

	A	B	C	L-Culator
Spule 1	11,62 µH	16,46 µH	29,25 µH	10,53 µH
Spule 2	-	11,85 mH	12,85 mH	9,79 mH
Spule 3	75,35 µH	75,35 µH	76,56 µH	115,02 µH

11. Vergleich mit experimentellen Befunden

Die Berechnungsergebnisse von L-Culator wurden auch mit Induktivitätsmessungen verglichen, die an realen Oszillatorspulen in Schwingkreisen für 20 kHz bis 2 MHz durchgeführt wurden. Die Spulen wurden sämtlich mit HF-Litze bewickelt, so dass die Frequenzverschiebung infolge der Kreisdämpfung äußerst gering ist. Zudem waren die Oszillatorschaltungen in der Lage, dämpfungsbedingte Frequenzverschiebungen zu kompensieren. So lag die Temperaturdrift der Frequenz $\Delta f / f \Delta T$ bei nur $5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Die Induktivität dieser Spulen wurde aus der Resonanzfrequenz ermittelt, wobei die Schwingkreiskapazität bekannt war.

Spule	D ₁	D ₀	L	n	L (gemessen)	L (berechnet)
	5,8 cm	4,7 cm	1,6 cm	91	475 µH	450 µH
	3,8 cm	2,5 cm	1,4 cm	30	30,3 µH	24,9 µH
	4,0 cm	2,2 cm	1,6 cm	155	567 µH	582 µH

Insgesamt ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung, wobei natürlich zu beachten ist, dass in die Messergebnisse mögliche Abweichungen der Schwingkreiskondensatoren von ihrem Nennwert mit einfließen, die in der Größenordnung von ca. 3 % liegen dürften. Die Messung der Resonanzfrequenz erfolgte mittels eines kalibrierten Oszilloskops (Genauigkeit ca. 0,5 %).

12. Literaturhinweise

J. D. Jackson, „Klassische Elektrodynamik“, Wiley, New York 1983

K. Küpfmüller, „Einführung in die theoretische Elektrotechnik“, J. Springer Verlag, Berlin 1973

T. Adamowicz *et al.*, „Handbuch der Elektronik“, Franzis-Verlag, München, 1. Aufl. 1979, Kap. 4.5 Spulen und Luftspulen